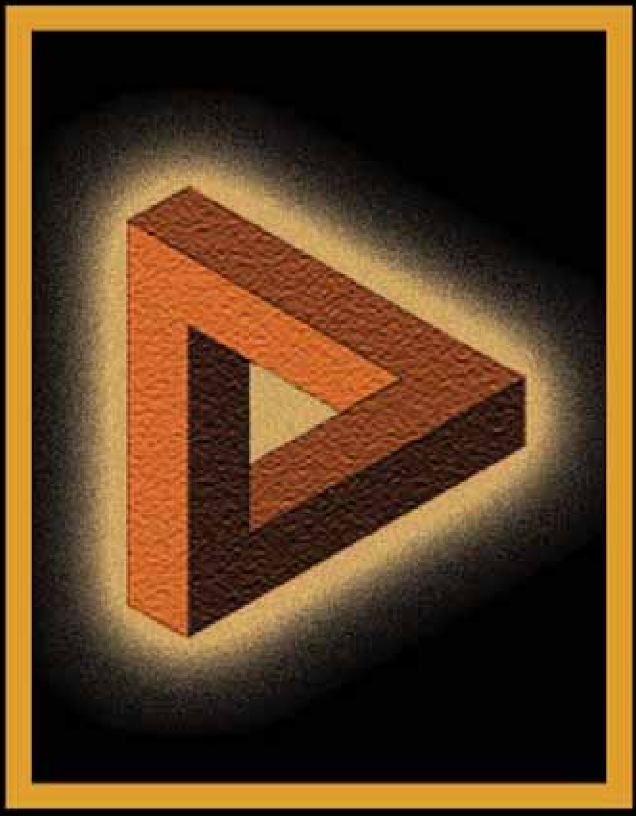
PRINCIPIA

INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO, ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA



José Alfredo Del Oso Acevedo
Isaí Moreno Roque
Rafael Torres Simón
Myrna Velarde Saldaña

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

Principia

Introducción al pensamiento matemático, aritmética y geometría

José Alfredo Del Oso Acevedo
Isaí Moreno Roque
Rafael Torres Simón
Myrna Velarde Saldaña

PRINCIPIA

INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO, ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

José Alfredo Del Oso Acevedo
Isaí Moreno Roque
Rafael Torres Simón
Myrna Velarde Saldaña

Academia de Matemáticas
Colegio de Ciencia y Tecnología
Programa de Integración

TALLER DE MATEMÁTICAS

COORDINACIÓN ACADÉMICA

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

materiales educativos

D.R. Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Av. División del Norte 906, Col. Narvarte Poniente,
Delegación Benito Juárez, C.P. 03020, México, D.F.

ISBN: 968-5720-76-2

Academia de Matemáticas, Colegio de Ciencia y Tecnología, Programa de Integración,
Coordinación Académica, UACM

Materiales Educativos: matsedusuacm@gmail.com
Responsable de la edición: Ana Beatriz Alonso

Diseño de la portada: Aarón Aguilar. Diagramas elaborados por integrantes de la UACM.
Imágenes tomadas de *images.google.com* con objetivos didácticos y sin fines de lucro.

Material educativo universitario de distribución gratuita para estudiantes de la UACM.
Prohibida su venta

Hecho e impreso en México / *Printed in Mexico*

La Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, en su Exposición de motivos, establece:

> "7. Contribuir al desarrollo cultural, profesional y personal de los estudiantes:
>
> (...) El empeño de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México deberá ser que todos los estudiantes que a ella ingresen concluyan con éxito sus estudios. Para ello deberá construir los sistemas y servicios que éstos necesiten para alcanzar este propósito de acuerdo con su condición de vida y preparación previa. (...)." [1]

De igual manera, en su Título I, Capítulo II, Artículo 6, Fracción IV, dice:

> "Concebida como una institución de servicio, la Universidad brindará a los estudiantes los apoyos académicos necesarios para que tengan éxito en sus estudios. (...)." [2]

Atendiendo a este mandato, los profesores - investigadores de la UACM preparan materiales educativos como herramienta de aprendizaje para los estudiantes de los cursos correspondientes, respondiendo así al principio de nuestra casa de estudios de proporcionarles los soportes necesarios para su avance a lo largo de la licenciatura.

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

[1] *Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México*, publicada en la *Gaceta Oficial del Distrito Federal* el 5 de enero de 2005, reproducida en el Taller de Impresión de la UACM, p. 14.
[2] *Ídem.*, p. 18.

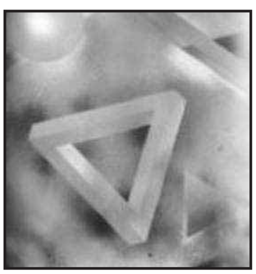


Imagen de la portada:

El Triángulo de Penrose, también llamado tribar*, es un objeto imposible. Fue creado por el artista sueco Oscar Reutersvärd en 1934, y popularizado en los años 1950s por el matemático inglés Roger Penrose.*

El tribar *aparenta ser un objeto sólido hecho con tres barras cuadradas que forman un triángulo; sin embargo, su fabricación en el espacio Euclideano o tridimensional no es posible: sólo puede ser concebido mediante el dibujo en dos dimensiones.*

Imagen tomada de en.wikipedia.org

■ AGRADECIMIENTOS

El germen de esta obra se debe en gran medida a las entusiastas profesoras Rita Vázquez y Teresa Velasco. Con toda generosidad nos brindaron el material electrónico de un trabajo anterior a éste que nos fue de gran utilidad.

Un reconocimiento especial a nuestra asesora editorial Ana Beatriz Alonso, cuya aportación fue fundamental para darle forma y estilo a este trabajo.

También queremos agradecer a la Mtra. María Rosa Cataldo, coordinadora del Plantel San Lorenzo Tezonco, quien al inicio del proyecto fungía como coordinadora del Programa de Integración, por su entusiasmo para llevar a cabo este proyecto.

Asimismo, agradecemos los comentarios y observaciones de la Dra. Rosa Margarita Álvarez, quien revisó el texto con gran minuciosidad, en un lapso de tiempo muy breve, así como las sugerencias realizadas por la Profesora Verónica Pérez.

Por último, queremos mostrar nuestro más profundo agradecimiento al Dr. Juan Antonio Nido, por sus comentarios respecto al estilo del libro.

Los autores

■ PRESENTACIÓN

Este es un libro dirigido, en general, a todo aquel que requiera adentrarse en la matemática a un nivel básico universitario, y en particular a los estudiantes de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México que cursan el módulo inicial del Programa de Integración.

Hemos llamado *Principia* a este libro por dos razones: La primera, porque así rendimos homenaje a dos grandes obras capitales de las matemáticas: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, de Sir Isaac Newton, y *Principia Mathematica*, del matemático y humanista Bertrand Russell. La otra razón obedece a que la palabra *principia*, referente a *principios* en latín, nos remite al elemento esencial que hace ser a la matemática: ésta se desarrolla a partir de principios, la mayoría de ellos simples e inmediatos.

El universo matemático es tan maravilloso y vasto que cualquier intento por ver su totalidad nos permite tan sólo dar un atisbo, como el columbrar por una rendija. Nosotros solamente pretendemos asomarnos por una ventana, bien ubicada que nos permita ver un panorama grato y, a su vez, no exento del rigor que exige el pensamiento matemático. La belleza de las matemáticas radica no sólo en el mundo propio que conforman, ajeno al universo real que nos rodea, sino en las capacidades creadoras de la mente y en los artificios que ésta es capaz para deducir hechos analíticamente.

En este texto hemos considerado la importancia del pensamiento deductivo, sin olvidarnos del inductivo, el cual es más inmediato y natural al ser humano. Por ello, iniciamos este libro con un apartado dedicado al pensamiento inductivo. Pretendemos que éste conduzca al estudiante a lo que el matemático Pólya llamaba "la excitación del descubrimiento". Todo ser humano es un matemático en potencia, como lo demuestra Platón en un fragmento de sus *Diálogos*. El pensamiento inductivo constituye una suerte de terapia: muestra al alumno que ya sabía matemáticas y que no es necesario un bagaje de fórmulas para poder llevarlas a cabo. Las fórmulas vienen después, y, en la medida de lo posible, intentamos que el estudiante, vía el razonamiento inductivo, llegue a ellas. Mostrar la validez universal de estas fórmulas o relaciones es otro asunto. Ahí entra en juego, hasta entonces, el pensamiento deductivo o lógico-formal.

Nuestro texto inicia con un *enfoque* que no requiere de una preparación previa. Privilegia, antes que el conocimiento, el pensamiento, la imaginación y el uso creativo de la razón. No en vano Einstein decía que la imaginación es más importante que el conocimiento. Tratamos de que el libro fuera ameno y lúdico, pero no por ello exento del carácter formal que persigue un texto serio y bien programado, tanto estructural como metodológicamente. Nos interesa que el alumno halle placer en hacer matemáticas o, al menos, que pierda el miedo infundado y las comprenda a cabalidad. Por otra parte, aún cuando deseamos fehacientemente que el texto sea fácil de abordar, tampoco olvidamos otra famosa frase de Einstein ─genio de la imaginación creadora─ "la ciencia debe ser fácil, pero no más fácil". Esto se aplica bien a las matemáticas.

El libro ha sido producto de la experiencia en las aulas de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México durante casi dos años, así como de una revisión exhaustiva de bibliografía sobre el tema y de la reflexión colectiva de sus autores. Estudiantes de las diversas ingenierías, así como de humanidades, han estudiado el programa que aquí se propone y que responde a las necesidades formativas de los estudiantes del módulo A del Taller de matemáticas.

En cuanto a la *propuesta didactica*, el libro ha sido redactado con la mayor claridad posible con el objeto de que los estudiantes que por diversas razones no puedan asistir al aula, encuentren un apoyo para su aprendizaje a lo largo de las páginas del texto. Por supuesto, a pesar de contar con bibilografía complementaria y ligas de internet, el texto no se limita a ser un material para autodidactas; sino que considera el trabajo interactivo, la participación del estudiante y un contacto más profundo con el profesor. La matemática es, en este sentido, un ejercicio dialéctico, ameno y eficaz cuando se realiza entre más de uno.

Respecto a la *profundidad pedagógica*, pretendemos que el libro cubra las necesidades de cualquier estudiante que requiera iniciarse en la aritmética y la geometría elemental. Pueden emplearlo como texto los estudiantes de los módulos iniciales del Programa de Integración, y como un buen libro de consulta, en cuanto a los temas referidos, los estudiantes del Ciclo Básico y Superior.

Metodológicamente, hemos considerado importante que el libro tenga una estructura. Que esté basado en un orden preciso, casi *canónico*, ya que esto refrenda la claridad con la que el material puede abordarse. Cada sección, tanto la de Aritmética como la de Geometría, y en particular la de Razonamiento Inductivo tiene listas de ejercicios cuidadosamente seleccionados y notas históricas amenas que permiten que el alumno perciba la génesis de algunos tópicos matemáticos.

El *estilo* del libro pretende un mejor acercamiento al estudiante, dejando de lado el distante *usted*. *Tú* y *nosotros* serán los pronombres que el libro emplee. En éste invitamos al alumno a realizar actividades diversas y a valorar el trabajo de conjunto.

Finalmente, hemos optado por una *propuesta visual* que bien podría considerarse *seria*, con páginas en blanco y negro. No por ello dejamos de ofrecer un libro profuso en imágenes. Encarecidamente hemos trabajado en que la *austeridad* visual del libro redunde en alejar distracciones, e introduzca al estudiante directo a los temas a tratar. En tal tratamiento tipográfico y de diseño editoral, hemos deseado que se refleje parte de esa belleza hasta cierto grado pura, muy simple, que tienen las matemáticas en su interior.

Esperamos habernos acercado a nuestros objetivos. Esta utopía, lo sabemos, es algo inalcanzable, pero nos ha permitido el milagro de caminar y diluir la inmovilidad de las formas estáticas y silentes.

José Alfredo Del Oso, Isaí Moreno, Rafael Torres y Myrna Velarde.
Academia de Matemáticas, Programa de Integración

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO
San Lorenzo Tezonco

■ CONTENIDO

■ MAPA DE RUTA: *Cómo acercarse a nuestro libro*

Este material de apoyo ha sido elaborado por un grupo de profesores; es un trabajo conjunto, y por esta razón podrás identificar distintos estilos para plantear y resolver los temas y actividades que se presentan a lo largo de las tres unidades que lo integran.

Observando y trabajando los diversos estilos tendrás elementos suficientes para comparar las similitudes y diferencias entre ellos, lo cual te permitirá identificar qué tipos de textos matemáticos funcionan mejor para tu aprendizaje individual.

En el universo de las matemáticas cada tema tiene sus características, sus reglas y su sello particular. Por esta razón, al avanzar por las secciones de este libro notarás que existen diferencias entre las unidades, tales como la extensión, la cantidad de ejercicios o la frecuencia con la que se solicita el trabajo autónomo o en equipo.

- En la Unidad I: Introducción al Pensamiento Matemático, se abordan las diferentes habilidades de pensamiento que ponemos en operación al adentrarnos en esta materia. También se plantea la existencia de una gama de posibilidades para resolver problemas, y que es válido utilizar cualquiera de ellas para conseguir el resultado deseado.

  Puesto que estos temas se refieren a procesos mentales y a estilos de percepción y respuesta, encontrarás un mayor énfasis en los procesos que en los resultados; es decir, en las actividades, en los razonamientos que haces a partir de tu trabajo y en la socialización de tus conclusiones.

- Por otra parte, en la Unidad II: Aritmética, se trabaja específicamente con el razonamiento deductivo, el cual nos obliga a seguir cada paso de las reglas en el orden necesario para resolver las operaciones; y nos presenta una metodología específica para obtener el resultado correcto de los problemas.

  El contenido es más extenso y el avance es gradual, ya que un conocimiento nuevo muchas veces depende del aprendizaje anterior. Por lo tanto, podrás notar que abundan las definiciones, los ejemplos, y los ejercicios de práctica.

- Por último, en la Unidad III: Geometría, se trabaja con conceptos matemáticos que pueden visualizarse, dibujarse y combinarse de manera más tangible. Esta disciplina, además de ser una de las más ancestrales, permite a un estudiante la inmediatez de ver los resultados de un razonamiento matemático. La sección es un tanto más amplia, ya que se incluyen además una serie de temas selectos que nos permiten ver los patrones geométricos existentes en la naturaleza.

  Por estas razones, esta unidad tendrá una mayor cantidad de figuras, bocetos e ilustraciones; y te introducirá a la obtención de los entes geométricos a partir de un punto, al uso de construcciones a regla y compás y, en general, al goce de la sola contemplación estética que la geometría conlleva.

Finalmente, queremos mencionarte que en las tres unidades se ha trabajado una misma *metodología*, es decir, el mismo orden para presentar el conocimiento y facilitar que te lo apropies de acuerdo a una secuencia de pasos y apoyos adicionales que podrás identificar con esta sencilla simbología:

1. 🛠 **ACTIVIDADES:** Son problemas que se te pedirán siempre al inicio de un concepto nuevo, con el fin de que evalues cuál es tu conocimiento previo sobre ese tema; es decir, que busques dentro de ti lo que ya sabes, para que lo recuerdes y lo uses.

2. Planteamiento del **concepto nuevo**: Es la explicación de la nueva información, el nuevo conocimiento, el contenido del tema, las definiciones, las reglas.

3. ✍ EJEMPLO: Aquí te presentaremos problemas resueltos paso a paso en los que se muestra cómo aplicar el nuevo contenido.

4. ■ **SECCIÓN DE EJERCICIOS:** Esta sección es indispensable para poner en práctica tu nuevo aprendizaje y evaluar tu avance.

5. ۞ ***Observaciones:*** En ocasiones encontrarás este símbolo con un breve texto. La información pretende darte herramientas que te apoyen en un punto específico del tema. También indican momentos en los que puedes evaluar tu aprendizaje, consultar a tu profesor o socializar tu trabajo.

6. *Cápsulas de* ***cultura matemática****:*
Hemos incluído información que abre los
temas hacia otras miradas,
como la historia, las anécdotas,
la naturaleza o el arte.

Recuerda que al final del libro hemos incluido listas de títulos y de vínculos electrónicos para que puedas investigar los contenidos que necesites.

■ UNIDAD 1

INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

PROPÓSITO

Desarrollarás habilidades de razonamiento lógico-matemático en la solución de problemas abstractos y aplicados, tales como clasificación, reconocimiento de patrones, generalización, abstracción, deducción y ubicación espacial.

Te apropiarás de ciertas estrategias o procedimientos para analizar toda una gama de problemas, a fin de que contemples que hay varias formas de resolverlos.

INTRODUCCIÓN

Los primeros testimonios materiales de la existencia del pensamiento matemático son dibujos y símbolos trazados sobre ladrillos o tabletas sirias y babilónicas, entre los siglos XXX y XX antes de nuestra era. Más o menos por la misma época aparecieron en Egipto los primeros documentos matemáticos escritos sobre papiros.

Desde entonces, paralela al desarrollo de esta ciencia, la curiosidad por la resolución de problemas de ingenio ha sido un factor que ha contribuido a la creación matemática, tanto o más que las aplicaciones prácticas.

El periodo clásico dio surgimiento a un tipo más formal de matemáticas, en donde los conceptos generales fueron aplicados a problemas específicos, teniendo como resultado un desarrollo lógico y estructurado de las matemáticas.

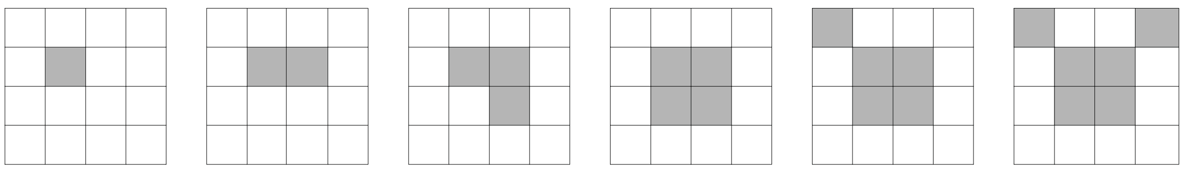
En esta unidad experimentarás distintas maneras de abordar y resolver problemas, las cuales pondrán en operación las distintas habilidades de razonamiento lógico-matemático que posees.

1.1 BÚSQUEDA DE PATRONES: RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Para la resolución de las actividades que se te presentan a continuación no requieres de fórmulas o conocimientos previos. Reúnete en equipo y discute su posible solución, escríbela de la manera más clara posible y compártela con el resto del grupo.

🛠 ACTIVIDAD 1

Encuentra un patrón en la siguiente secuencia de figuras. ¿Cuál es la siguiente figura en la lista?



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

- Explica junto a tus compañeros de equipo cuál fue el procedimiento que siguieron y por qué.

🛠 ACTIVIDAD 2

¿Cuál es el término que sigue en esta lista?

U, D, T, C, C, S, S, O ...

- ¿Cómo lo obtuvieron?

🛠 ACTIVIDAD 3

Determina el siguiente término más probable en cada fila de números.

13, 18, 23, 28, 33 ...

1, 8, 27, 64, 125 ...

1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1 ...

- ¿Cómo predicen el término siguiente en cada lista?
- ¿Podrían definir con sus propias ideas, y haciendo uso de lo discutido en las actividades anteriores, qué es una *conjetura*?

🛠 ACTIVIDAD 4

SUCESIÓN DE FIBONACCI

Un hombre puso una pareja de conejos en una jaula. Durante el primer mes, los conejos no tuvieron descendencia; pero cada uno de los meses posteriores produjeron un nuevo par de conejos. Si cada nuevo par producido de este modo se reproduce de la misma manera, ¿cuántos pares de conejos habrá al final de este año?

Éste es uno de los famosos problemas en la historia de las matemáticas y apareció por primera vez en el libro *Liber Abaci*, escrito por el matemático italiano Leonardo Pisano (Fibonacci), en el año 1202. La tabla muestra el número de pares de conejos al inicio y al final de cada mes.

Mes	***No. de pares al inicio del mes***	***No. de nuevos pares producidos***	***No. de pares al final del mes***
1	1	0	1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	3	2	5
5	5	3	8
6	8	5	13
7	13	8	21
8	21	13	34
9	34	21	55
10	55	34	89
11	89	55	144
12	144	89	233

A la segunda columna de la tabla se le conoce como *sucesión de Fibonacci*; esto es, a la sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

- ¿Podrías describir qué regla está siguiendo la sucesión? Consulta con tu profesor el significado de **patrón** en matemáticas.

- ¿Cuál será el término 16 en la sucesión?

- En lenguaje matemático, ¿cómo escribirías el patrón que representa a la sucesión? Apóyate en tu profesor.

🛠 ACTIVIDAD 5

Martín corta una hoja gigante de papel en 8 partes iguales, después corta de nuevo una de las partes en 8 pedazos y así sucesivamente. ¿Puede obtener en algún momento exactamente 2005 pedazos?

- Elabora un resumen de las estrategias que se utilizaron para resolver las actividades anteriores. También escribe aquéllas que no te funcionaron e indica por qué no fueron exitosas.

۞ ***Seguramente utilizaste la observación como medio para resolver algunas de las actividades planteadas: observaste las secuencias que se presentaban y elaboraste un patrón para cada una de ellas. En términos formales, a las conclusiones obtenidas se les llama* conjeturas.**

Una **conjetura** es una suposición fundamentada en observaciones repetidas de un patrón o proceso particular.

۞ ***A la forma en que has razonado para abordar y resolver las actividades anteriores se le conoce como* razonamiento inductivo.**

El **razonamiento inductivo** se caracteriza por obtener una conclusión general (haciendo una conjetura) a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o falsa. Así:

Razonamiento inductivo es aquel proceso en el que se razona partiendo de lo particular para llegar a lo general.

Suponemos que algo es cierto en algunas ocasiones y deducimos que lo será en situaciones similares aunque no se hayan observado.

■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

Los siguientes ejercicios pueden ser trabajados en equipo o de manera individual. Tu profesor te dará las indicaciones.

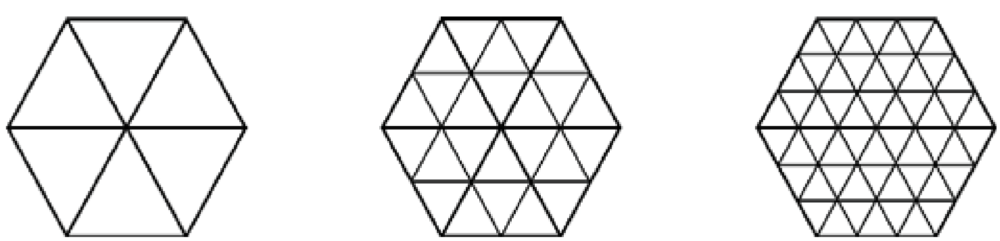
۞ ***Si por alguna razón vas a resolver esta sección de manera individual, te sugerimos que revises previamente la sección 1.3 MANEJO DE ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS, ya que en ella encontrarás ejemplos detallados sobre cómo abordar y resolver un problema.***

1. Encuentra el número que sigue en las siguientes listas:

6, 9, 12, 15, 18, ...	32, 16, 8, 4, 2, ...
3, 6, 9, 15, 24, 39, ...	1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10, ...

- Explica cuál fue tu razonamiento y compáralo con los del grupo.

2. Siguiendo el patrón de estas figuras,



a) ¿Cuántos triangulitos habrá en la cuarta figura?

b) ¿Cuántos en la figura número cinco?

c) ¿Cuántos en la novena figura?

d) ¿Y en la figura *n*?

3. Selecciona cualquier número y sigue estos pasos:

a) Multiplícalo por 2.

b) Al resultado súmale 6.

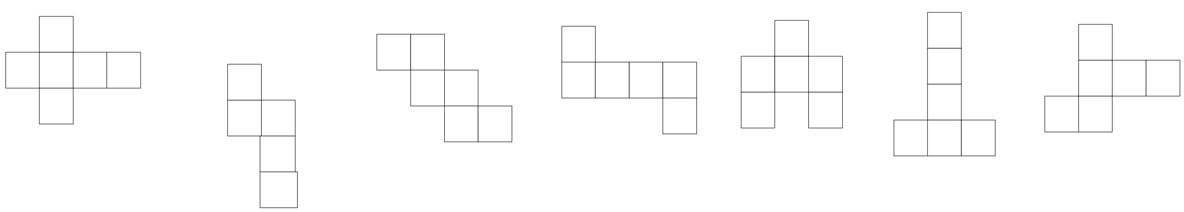
c) Lo que resultó, divídelo entre 2.

d) Al resultado final, réstale el número con el que empezaste.

e) Anota tu resultado.

- Efectúa el procedimiento anterior; pero en el paso b) súmale 8. Anota tu resultado. ¿Cómo harías para predecir el resultado final? Puedes repetir el procedimiento; pero en el paso b), ahora súmale 10.

4. ¿Cuál de las siguientes figuras no se convierte en un cubo perfecto si las doblamos sobre sus líneas negras?



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

- Escribe el razonamiento sin excepción para la solución de cada problema. Si es posible, discútelo con tus compañeros de equipo.

5. Las siguientes listas de números son términos de la sucesión de Fibonacci. Conjetura una ecuación que represente a cada una de las 4 columnas.

1=2-1 1+3=5-1 1+3+8=13-1 1+3+8+21=34-1 1+3+8+21+55=89-1	1=1 1+2=3 1+2+5=8 1+2+5+13=21 1+2+5+13+34=55	$1^2+1^2=2$ $1^2+2^2=5$ $2^2+3^2=13$ $3^2+5^2=34$ $5^2+8^2=89$	$2^2-1^2=3$ $3^2-1^2=8$ $5^2-2^2=21$ $8^2-3^2=55$

6. Reflexiona si has utilizado recientemente el razonamiento inductivo frente a algún problema cotidiano. ¿Tu solución fue acertada?

- ¿Por qué?

7. a) Dos parejas quieren cruzar el río durante un paseo. El bote sólo da cabida a dos personas. Siendo los hombres muy celosos, ninguno permite que en su ausencia su pareja se quede en una orilla, o que vaya en el bote con el otro hombre. ¿Cómo se las arreglan para cruzar?

b) Tres parejas quieren cruzar el río durante un paseo. El bote sólo da cabida a dos personas. Siendo los hombres muy celosos, ninguno permite que en su ausencia su pareja se quede en una orilla, o que vaya en el bote con ninguno de los otros hombres. ¿Cómo se las arreglan para cruzar?

c) Y para cuatro parejas, ¿cuál sería el procedimiento?

d) ¿Cómo generalizarías el resultado para cualquier número de parejas?

8. Se tienen 6 monedas de dos tipos: 3 de uno y 3 de otro, colocadas en la siguiente configuración:

M M M ___ m m m

Lo que debes hacer es pasar las monedas de la izquierda a la derecha, basándote en las siguientes reglas:

- Avanza al frente sólo una moneda y un lugar a la vez.
- Dos monedas de un mismo tipo pueden estar juntas sólo al comienzo y al final de la fila.
- Sólo se puede 'brincar' un lugar.

Sugerencia: intenta primero el ejercicio con cuatro monedas.

- ¿Cómo lo harías con ocho monedas?
- ¿Puedes generalizar lo anterior para *n* monedas? Discute tu propuesta con otros equipos y finalmente explícalo en clase.

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA 1

EL PROBLEMA DEL FIN DEL MUNDO

Leyenda hindú

"En el gran templo de Benarés, debajo del domo el cual marca el centro del mundo, descansa una base de plata en la cual se fijan tres agujas de diamante, cada una de un cúbito de alto (50.8 cm aproximadamente) y tan anchas como el cuerpo de una abeja. Sobre una de estas agujas Dios colocó 64 discos de oro puro, cada uno con diámetro poco mayor que el anterior. El disco más grande se encuentra descansando sobre la base y los demás en orden decreciente encima de él. Ésta es la Torre de Brahama.

Día y noche, sin cesar, el sacerdote en turno transfiere los discos de una aguja a otra, acorde con las leyes fijas e inmutables de Brahama:

1. El sacerdote sólo puede mover un disco a la vez.
2. Nunca debe colocarse un disco más grande sobre otro de menor tamaño.

Cuando el sacerdote termine de transferir la totalidad de los discos, la torre, el templo y los brahamanes serán hechos polvo y el mundo terminará."

Ésta es una de varias leyendas de civilizaciones antiguas donde se involucran números muy grandes. Para esta práctica, pide al profesor las torres y trabaja con ellas, respetando las leyes fijas e inmutables de Brahama. Después resuelve en equipo las siguientes actividades:

a) Completa la siguiente tabla:

No. de discos	***No. de pasos***	***Tiempo(s)***	***Promedio parcial (s)***
1			
2			
3			
4			
5			
		Promedio total:	

b) ¿Existe un patrón entre el número de discos y el número de pasos? Intenta encontrar el patrón y completar los datos:

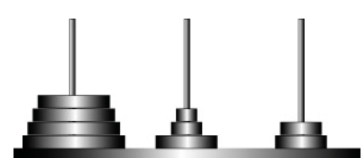
No. de discos	***Patrón / No. de pasos***
1	
2	
3	
4	
5	
6	
* * *	* * *
10	
* * *	* * *
n	

c) Una vez que hayas encontrado el patrón del número de pasos necesarios para transferir *n* discos de una aguja a otra de la torre de Brahama, calcula el tiempo que te tomaría transferir los 64 discos de la leyenda, suponiendo que por cada paso utilizan un tiempo equivalente al promedio total de la tabla del inciso a). Es recomendable utilizar una calculadora científica.

- Compara el tiempo que obtuviste con el valor aproximado de la edad del Universo, según las teorías cosmológicas modernas. Investiga con algún profesor de física.

- Según tus resultados, ¿podemos sentirnos seguros de que el mundo no se terminará pronto?

El problema del fin del mundo. Para facilitar la solución de este problema matemático clásico (también conocido como las Torres de Hanoi), los educadores se han ayudado de modelos tridimensionales que representan las tres torres con los 64 discos. En el Museo Universum del Centro Cultural Universitario de la UNAM, encontrarás un modelo con el que puedes ensayar.



1.2 VERDADES COMPROBADAS: RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Aborda las actividades que se presentan a continuación, anotando las estrategias, conceptos, dibujos, esquemas u otra herramienta que utilices para resolverlas. Después comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros.

🛠 ACTIVIDAD 6

Un *cuadrado mágico* es la disposición de una serie de números en un cuadrado con casilleros, de tal forma que la suma de los números por columnas, filas y diagonales sea la misma. A esta suma se le conoce como *suma mágica*. Por ejemplo, éste es un cuadrado mágico con 9 casilleros:

6	**11**	**4**
5	**7**	**9**
10	**3**	**8**

En este cuadrado mágico, la suma mágica es 21. Puedes comprobarlo sumando cada fila de manera vertical, horizontal y diagonal.

Coloca los números naturales del 1 al 9 en las celdillas del cuadrado siguiente, de tal suerte que sea mágico y que la suma sea 15.

- ¿Qué operaciones efectuaste para lograr que tu cuadrado fuera mágico?

De acuerdo con una fantástica historia de Charles Trigg publicada en Mathematics Magazine *en septiembre de 1976 (p. 212), el emperador* **Carlomagno** *(742-814) ordenó que se construyera una fortaleza de cinco lados en un punto importante de su reino. Como amuletos de buena suerte, tenía cuadrados mágicos colocados en cada uno de los cinco lados de la fortaleza. Puso una condición para estos cuadrados mágicos: todos los números en ellos debían ser* números primos.

🛠 ACTIVIDAD 7

Diana es más alta que David, pero más baja que Carlos. Daniel es más bajo que Christian. ¿Cuál es la primera letra del nombre de la persona más alta?

- ¿Qué procedimiento seguiste para resolver la actividad?

- ¿Por qué?

🛠 ACTIVIDAD 8

Un hombre va a un pozo con tres recipientes cuyas capacidades son de 3, 5 y 8 litros, respectivamente. Considerando que los recipientes no están graduados, ¿qué proceso debe seguir para sacar exactamente 4 litros de agua?

🛠 ACTIVIDAD 9

Utiliza las operaciones elementales (suma, resta, producto[1] y división) y cuatro dígitos "4" para obtener los números del 1 al 10. Por ejemplo:

$$\frac{44}{44} = 1$$

- ¿Existe sólo un procedimiento para encontrar cada número del 1 al 10?

🛠 ACTIVIDAD 10

Considera que tienes dos relojes de arena que cronometran 5 y 9 minutos, respectivamente. ¿Cuál es la forma más fácil de medir el tiempo para hervir un huevo durante 13 minutos? Si tienes a tu disposición un reloj de arena, experimenta con él.

- Elabora un resumen de las estrategias que se utilizaron para resolver las actividades anteriores; también escribe aquéllas que no te funcionaron y discútelas con tus compañeros.

- ¿Utilizaste el mismo tipo de razonamiento y estrategias que en el grupo de actividades anteriores?

- Especifica y anota cuáles fueron las diferencias.

Las estrategias y razonamientos que acabas de utilizar tienen que ver con el llamado razonamiento deductivo.

El **pensamiento deductivo** parte de categorías generales
para hacer afirmaciones sobre casos particulares. Va de lo general a lo particular.
El razonamiento deductivo parte de verdades comprobadas que se aplican a ejemplos específicos.

En otras palabras, el pensamiento deductivo es una forma de razonamiento en el que se concluye algo a partir de una o varias *premisas* (puede ser una suposición, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada).[2]

Por ejemplo, el razonamiento deductivo permite deducir que un litro de agua a 130º estará en ebullición (a nivel del mar), o que 15 es mayor que 10, puesto que son verdades comprobadas.

De igual manera, las operaciones que tuviste que efectuar en las actividades anteriores, se basan en leyes comprobadas.

[1] El producto es el resultado de la multiplicación de números.

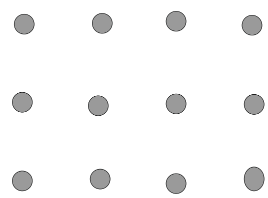
[2] El filósofo griego Aristóteles, con el fin de reflejar el pensamiento racional, fue el primero en establecer los principios formales del razonamiento deductivo. Para conocer más sobre *premisas*, consulta con tu asesor.

■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

Los siguientes ejercicios pueden ser trabajados en equipo o de manera individual. Tu profesor te dará las indicaciones.

Si por cualquier razón vas a resolver esta sección de manera individual, te sugerimos que revises previamente la sección 1.3 MANEJO DE ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS, ya que en ella encontrarás ejemplos detallados sobre cómo abordar y resolver un problema.

9. ¿Cuántas líneas rectas ─sin levantar el lápiz─ son las mínimas necesarias para pasar por encima de los 12 puntos colocados en 4 columnas y 3 filas? Las líneas pueden ser horizontales, verticales o diagonales.



- ¿Hay un sólo camino con el mínimo de líneas rectas?

10. Marcos abrió su alcancía y vio que había monedas de cinco y diez pesos. Si eran 72 monedas en total, y sus ahorros ascendían a 495 pesos, ¿cuántas monedas de cada una había en su alcancía?

- ¿Cómo obtuviste el resultado? Discútelo con tus compañeros.

11. Una rana está en el fondo de un pozo de 20 metros de profundidad. Cada día se arrastra 4 metros hacia arriba; pero cada noche se resbala de regreso 3 metros. ¿Después de cuántos días alcanzará la rana la boca del pozo?

12. En el problema siguiente, cada letra representa un dígito específico. Suponiendo que el problema se ha resuelto correctamente, ¿qué dígitos representan las letras?

$$\begin{array}{r} P\ \ P\ \ P \\ +\qquad A \\ \hline A\ \ B\ \ B\ \ B \end{array}$$

- ¿Cómo encontraste el valor de cada letra?

- El procedimiento que seguiste, ¿fue el mismo que el de tus compañeros?

13. Imagina que tienes 8 monedas. De éstas, 7 son auténticas y 1 es falsa, la cual pesa un poco menos que las demás. Tienes también una balanza de platillos que puedes usar sólamente 3 veces.

- Indica cómo descubrir la moneda falsa en 3 pesajes.

- Discute tu procedimiento con tus compañeros.

- Ahora muestra, con las mismas monedas, cómo detectar la moneda falsa en únicamente 2 pesajes.

14. Tienes siete pesas con distintas masas[3]: 14 kg, 25 kg, 40 kg, 59 kg, 49 kg, 32 kg, y 19 kg. Elimina una de ellas. Las seis pesas restantes deben dividirse en dos grupos de tres pesas cada uno y lograr que tengan exactamente la misma masa. ¿Cuál es la pesa que debes eliminar?

- ¿Por qué?

15. Hugo, Paco y Luis tienen cada uno dos profesiones. En conjunto, las profesiones son: chofer, taxista, músico, pintor, jardinero y peluquero.

- Sabiendo que:

  ◘ El chofer ofendió al músico.

  ◘ El músico y el jardinero fueron a pescar con Hugo.

  ◘ El pintor se subió en el coche del taxista.

  ◘ Al chofer le gustaba la hermana del pintor.

  ◘ Luis debía 5 pesos al jardinero.

  ◘ Paco venció a Luis y al pintor en rayuela.

- ¿Cómo determinarías una profesión de Hugo y otra de Paco?

🛠 ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA 2

LA LÓGICA DE EINSTEIN

Este problema fue propuesto por Einstein y traducido a varios idiomas conservando su lógica. Einstein aseguraba que el 98% de la población mundial sería incapaz de resolverlo. Creemos que tú perteneces al 2% restante. Inténtalo.

- Condiciones iniciales:

  ◘ Tenemos cinco casas, cada una de un color.

  ◘ Cada una tiene un dueño de nacionalidad diferente.

  ◘ Los cinco dueños beben bebidas diferentes, fuman marcas diferentes y tienen mascotas diferentes.

- Datos:

  1. El noruego vive en la primera casa, junto a la casa azul.

  2. El que vive en la casa del centro toma leche.

  3. El inglés vive en la casa roja.

  4. La mascota del sueco es un perro.

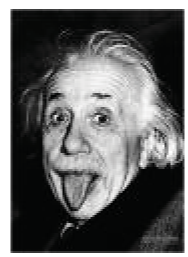
[3] Es oportuno recordar que lo que medimos en kilogramos es la masa de un objeto; a pesar de que, equivocadamente, hablamos del peso de un objeto. (Es la masa la que se mide en kilogramos; y el peso se mide en *Newtons*.)

5. El danés bebe té.
6. La casa verde es la inmediata a la izquierda de la casa blanca.
7. El de la casa verde toma café.
8. El que fuma Pall Mall cría pájaros.
9. El de la casa amarilla fuma Dunhill.
10. El que fuma Benson vive junto al que tiene gatos.
11. El que tiene caballos vive junto al que fuma Dunhill.
12. El que fuma Marlboro bebe cerveza.
13. El alemán fuma Camel.
14. El que fuma Benson tiene un vecino que bebe agua.

- ¿Quién tiene peces por mascota?

Si decidiste aceptar este reto, el intercambio de ideas es muy importante. Así que, además de discutir tu razonamiento con tus compañeros, puedes consultar a varios profesores en asesoría.

Albert Einstein, *científico alemán que desarrolló las más avanzadas teorías de la física durante el siglo XX, entre las que se encuentra la* Teoría General de la Relatividad.



1.3 MANEJO DE ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En las secciones previas hemos puesto en práctica tanto la búsqueda de patrones como el uso del razonamiento deductivo para el planteamiento y la solución de problemas. Te hemos pedido también que elabores, junto con tu equipo, un resumen acerca de la manera en que los has resuelto.

Seguramente te has dado cuenta de que no ha sido única la manera en la que los has planteado: tal vez resolviste algunos de ellos mediante un esquema; otros, con alguna fórmula; algunos más, leyendo el problema y razonando la solución; y muchos otros, por ensayo y error.

Esto comprueba que existen muy variadas formas para plantear y resolver problemas, las cuales abren interesantes posibilidades en tu aprendizaje de las matemáticas.

A continuación te planteamos un esquema que puede serte útil para trabajar el resto de este texto, y para cualquier situación en la que te enfrentes a un problema determinado durante tus estudios ya que, como has podido darte cuenta, el planteamiento y solución de problemas no es un tema exclusivo de esta ciencia.

El estudio al que nos referimos es una propuesta muy conocida acerca de las técnicas para la solución de problemas. Fue desarrollado por el matemático polaco George Pólya (1888-1985). Lo enunciamos a continuación:

PROCESO DE LOS CUATRO PASOS DE PÓLYA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1) *ENTIENDE EL PROBLEMA*

   El problema debe ser leído y analizado cuidadosamente. Es probable que necesites leerlo varias veces. Después de que así lo hayas hecho pregúntate: ¿Qué debo encontrar?

2) *FORMULA UN PLAN*

   Hay muchas formas de atacar un problema y decidir qué plan es el adecuado. Aquí hay algunas estrategias:

   - *Elabora una tabla o un diagrama.*
   - *Busca un patrón.*
   - *Resuelve un problema similar más sencillo.*
   - *Escribe una ecuación y resuélvela.*
   - *Si una fórmula es aplicable, úsala.*
   - *Vuelve a revisar el trabajo.*
   - *Realiza suposiciones y verifícalas.*
   - *Utiliza el método de ensayo y error.*
   - *Usa el sentido común.*
   - *Si una respuesta parece bastante obvia o imposible, busca una trampa.*

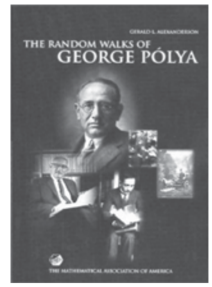
3) *LLEVA A CABO EL PLAN*

   Una vez que sepas cómo enfocar el problema, realiza tu plan: sé persistente. Si eres capaz de resolver un problema sin ningún esfuerzo, entonces esto no tiene mucho de problema, ¿o si?

4) REVISA Y COMPRUEBA

Comprueba tu respuesta para ver que sea razonable: ¿Satisface las condiciones del problema? ¿Has respondido a todas las preguntas que se hacen en el problema? ¿Puedes resolver el problema de manera diferente y alcanzar la misma respuesta?

George Pólya *es autor del libro clásico*
How to solve it (Cómo resolverlo).
Originario de Budapest, Hungría, murió a la edad de 97 años.
En una ocasión se le preguntó por qué a finales de siglo habían
surgido tantos buenos matemáticos en su país, a lo cual respondió:
"se debe a que la matemática es la ciencia más económica:
no requiere de ningún equipo costoso;
solamente de lápiz y papel".



En los ejemplos que a continuación se presentan, te señalamos algunas estrategias que puedes seguir en la solución de problemas a partir de los cuatro pasos de Pólya.

✍ EJEMPLO 1

- Una mañana la Sra. Martínez, la Sra. Pérez, la Sra. Torres y la Sra. Gómez fueron de compras. Sus compras se simplificaban por el hecho de que vivían en un pequeño poblado y únicamente había un comercio de cada tipo.
  - Cada una de ellas tenía que ir a dos tiendas distintas.
  - Una de las mujeres tenía que visitar la tlapalería,
  - dos tenían que ir al banco,
  - dos tenían que ir al carnicero y
  - tres tenían que ir a la tienda de abarrotes.
- Si:
  - Dora no fue a la tienda de abarrotes,
  - tanto Esther como la Sra. Gómez fueron al carnicero,
  - Margarita llegó a casa con más dinero que cuando se fue y
  - la Sra. Pérez no fue a ninguno de los lugares en donde estuvieron Lucía y la Sra. Torres,
- ¿cuál es el apellido de Margarita?

- **Siguiendo los pasos de Pólya**:

1. ENTIENDE EL PROBLEMA:

A pesar de lo extenso del enunciado del problema, la pregunta es clara: deseamos encontrar el apellido de Margarita a partir de todos los datos que se nos proporcionan.

2. FORMULA UN PLAN:

Hay varias formas de abordar el problema. Una de ellas es la de apoyarnos con una tabla, en la que asignemos una columna a cada señora y revisemos cada enunciado para ver si lo satisface. La tabla, además, hace innecesario que debamos recordar todos los datos.

Dora	***Esther***	***Margarita***	***Lucía***

3. LLEVA A CABO EL PLAN:

Vamos revisando cada enunciado, y decidimos a qué señora le corresponde. Si un enunciado no puede ser asignado es porque necesitamos más datos. En ese caso, pasamos al siguiente enunciado que podemos colocar. Algunos datos se asignan por eliminación:

Dora	***Esther***	***Margarita***	***Lucía***
✔ (1) no fue a la tienda de abarrotes ✔ (7) el apellido de Dora es Pérez, ya que no fue a ninguno de los dos lugares donde estuvieron Lucía y la Sra. Torres, y como Lucía fue a la tienda de abarrotes, sabemos que Dora no fue ✔ (9) las únicas posibilidades que quedan es que Dora haya ido a la tlapalería y al banco	✔ (2) fue al carnicero ✔ (4) fue a la tienda de abarrotes porque Dora no fue y deben ir tres ✔ (10) el apellido de Esther es Torres, ya que Dora no fue a ninguno de los lugares a donde fueron Lucía y la Sra. Torres, que son al carnicero y a la tienda de abarrotes	✔ (3) como Margarita llegó a casa con más dinero del que se fue, suponemos que fue al banco ✔ (5) fue a la tienda de abarrotes porque Dora no fue y deben ir tres	✔ (6) fue a la tienda de abarrotes porque Dora no fue y deben ir tres ✔ (8) Lucía se apellida Gómez y fue al carnicero, ya que la otra posibilidad era Dora, pero ya vimos que su apellido es Pérez
		Respuesta: por lo tanto, el apellido de Margarita es Martínez.	

4. REVISA Y COMPRUEBA:

Para comprobar que nuestra respuesta es correcta, debemos verificar cada una de las premisas del problema. Esto es, leer cada uno de los enunciados y revisar que, con nuestra respuesta, no hayamos llegado a una contradicción.

Los números que aparecen en la tabla fueron colocados en el orden en el que se fue llegando a cada una de las conclusiones. Esto nos indica que no necesariamente es importante seguir el orden en el que está redactado el problema.

✍ EJEMPLO 2

En una tribu del Amazonas, donde todavía se practica el trueque como un medio de intercambio de pertenencias, se tienen las siguientes equivalencias:

- Un collar y una lanza se cambian por un escudo.
- Una lanza se cambia por un collar y un cuchillo.
- Dos escudos se cambian por tres cuchillos.

- ¿A cuántos collares equivale una lanza?

- **Siguiendo los pasos de Pólya:**

1. *ENTIENDE EL PROBLEMA*:

El problema que se nos presenta es un trueque de artículos. Las premisas del problema involucran equivalencias; pero ninguna es la que nos preguntan.

2. *FORMULA UN PLAN*:

Para representar de una manera distinta las equivalencias dadas en el problema, podemos nombrar a los artículos con una letra. Ahora podemos manipular estas equivalencias escritas de una manera simbólica:

1 Collar	=	*C*
1 Lanza	=	*L*
1 Cuchillo	=	*K*
1 Escudo	=	*E*

Las equivalencias del problema quedarían escritas como:

$$C + L = E$$
$$L = C + K$$
$$2E = 3K$$

3. *LLEVA A CABO EL PLAN*:

Si $L = C + K$, entonces $3L = 3C + 3K$ *(1)*

sabemos también que $2E = 3K$ *(2)*

sustituyendo *(2)* en *(1)*, tenemos que $3L = 3C + 2E$ *(3)*

también sabemos que $E = L + C$ *(4)*

nuevamente, sustituyendo *(4)* en *(3)*, resulta $3L = 3C + 2C + 2L$

esto es, $3L = 5C + 2L$

si quitamos dos lanzas de ambos lados llegamos a la pregunta original:

Respuesta: $L = 5C$: una lanza equivale a cinco collares.

4. *REVISA Y COMPRUEBA*:

Si leemos las afirmaciones del problema, podemos comprobar que nuestra respuesta es correcta.

✍ EJEMPLO 3

Completa los espacios en blanco, de tal manera que resuelvas la siguiente multiplicación. Deberás usar todos los dígitos (0, 1, 2, 3, ... 9) exactamente una vez, y lograr que el producto sea correcto:

$$\begin{array}{rrrrr} & & \boxed{} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ & & \mathbf{X} & \mathbf{3} & \boxed{} \\ \hline \boxed{} & \mathbf{5,} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$$

- **Siguiendo los pasos de Pólya**:

1. ENTIENDE EL PROBLEMA:

El problema es claro, debemos llenar los espacios con los dígitos faltantes, de tal manera que no se repitan. Observa que no aparece todo el procedimiento de la operación; únicamente los números que se van a multiplicar y el resultado final.

2. FORMULA UN PLAN:

De los 10 dígitos, ya están colocados el **0**, el **2**, el **3** y el **5**. Por lo tanto, nos quedan por colocar en los espacios los números **1**, **4**, **6**, **7**, **8** y **9**.

Puesto que en el cuerpo de la operación tenemos 2 incógnitas, vamos a formar parejas con estos dígitos, donde el primer número se va a colocar en el espacio a la derecha del **3**, y el segundo número que forma la pareja representará el espacio en blanco a la izquierda del **0**. Trataremos de encontrar la respuesta mediante el método de ensayo y error.

3. LLEVA A CABO EL PLAN:

Entonces, podemos formar parejas con los números **1**, **4**, **6**, **7**, **8** y **9**, como se muestra:

1, 4	**1, 6**	**1, 7**	**1, 8**	**1, 9**
4, 1	**4, 6**	**4, 7**	**4, 7**	**4, 9**
6, 1	**6, 4**	**6, 7**	**6, 8**	**6, 9**
7, 1	**7, 4**	**7, 6**	**7, 8**	**7, 9**
8, 1	**8, 4**	**8, 6**	**8, 7**	**8, 9**
9, 1	**9, 4**	**9, 6**	**9, 7**	**9, 8**

Haciendo esta tabla, podemos visualizar el tamaño de la tarea y tener el control de la misma. Como puedes ver, son muchas las posibilidades para llegar a la respuesta. Quizás podamos deshacernos de algunas parejas automáticamente y ahorrarnos un poco el trabajo.

Por ejemplo, si probáramos con la primera fila de la tabla, esto es, la fila que inicia con **1**, al colocar la primera pareja en los espacios tendríamos la siguiente operación:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{4} & 0 & 2 \\
 & & \text{X} & 3 & \boxed{1} \\
\hline
 & & 4 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 6 & \\
\hline
\boxed{1} & 2, & \boxed{4} & \boxed{6} & \boxed{2}
\end{array}
$$

De inmediato apreciamos que el número **2** se repetiría, ya que al sumar las columnas para llegar al resultado final, el primer número de la derecha es **2**. Entonces, como no nos sirve colocar ahí el número **1**, todas aquellas parejas que inician con **1**, quedan automáticamente descartadas.

También puedes observar que, para todas aquellas parejas que inician con **6** ocurre lo mismo, así que también las descartamos.

Y así, empezamos a probar con las posibles parejas restantes. Por ejemplo, utilizando la siguiente fila de nuestra tabla, con la pareja **4**, **1**:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{1} & 0 & 2 \\
 & & \text{X} & 3 & \boxed{4} \\
\hline
 & & 4 & 0 & 8 \\
 & 3 & 0 & 6 & \\
\hline
\boxed{0} & 3, & \boxed{4} & \boxed{6} & \boxed{8}
\end{array}
$$

Vemos que no es la respuesta correcta, ya que se repiten el **0**, y el **4**; y el **5**, antes establecido, no aparece.

Si probamos con la pareja **4**, **6**:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{6} & 0 & 2 \\
 & & \text{X} & 3 & \boxed{4} \\
\hline
 & 2 & 4 & 0 & 8 \\
1 & 8 & 0 & 6 & \\
\hline
\boxed{2} & 0, & \boxed{4} & \boxed{6} & \boxed{8}
\end{array}
$$

De igual manera, vemos que no es la respuesta correcta, ya que el **5** establecido no aparece, y el **4** y el **6** se repiten.

Al continuar probando, llegamos a que con la pareja **9**, **4** tenemos la siguiente respuesta:

Respuesta:

$$\begin{array}{ccccc} & & \boxed{\mathbf{4}} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ & & \mathbf{X} & \mathbf{3} & \boxed{\mathbf{9}} \\ \hline & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \\ \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{5,} & \boxed{\mathbf{6}} & \boxed{\mathbf{7}} & \boxed{\mathbf{8}} \end{array}$$

4. REVISA Y COMPRUEBA:

Al efectuar la operación, comprobamos que nuestra respuesta es correcta.

■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

Los siguientes ejercicios pueden ser trabajados en equipo o de manera individual. Tu profesor te dará las indicaciones. [4]

16. Un señor que vende huevos tiene ante sí seis cestas. Cada una tiene huevos de una clase: de gallina o de pata y cada cesta tiene el número de huevos que se indica:

6	15	29
12	14	23

El señor dice, señalando una cesta: “Si vendo esta cesta, me quedará el doble de huevos de gallina que de pata.” ¿Podrías averiguar de qué cesta está hablando?

17. Escoge dos números naturales. Suma 1 al segundo y divídelo entre el primero para obtener un tercer número. Suma 1 al tercero y divídelo entre el segundo para obtener un cuarto número. Suma 1 al cuarto y divídelo entre el tercero para obtener un quinto número. Continúa este proceso hasta que descubras un patrón. ¿Cuál es el patrón?

18. Algunos niños están parados formando un círculo. Se encuentran separados a la misma distancia uno del otro y marcados en orden numérico. El cuarto niño se encuentra parado exactamente enfrente del duodécimo niño. ¿Cuántos niños hay en el círculo?

[4] Si deseas revisar más actividades relacionadas con esta unidad, puedes recurrir al libro *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones* de Charles D. Miller, Vern E. Heeren y E. Jhon Hornsby, JR. Editorial Pearson Education.

19. En el vértice de una caja con dimensiones 2 x 3 x 4 se encuentra una araña que quiere ir al vértice opuesto caminando sobre las caras de la caja. ¿Cuál es la distancia mínima que debe recorrer?

20. En una mesa hay cierto número de columnas con discos. Una jugada consiste en elegir una de las columnas, quitar un disco y dividir lo que resta de la columna en dos columnas, no necesariamente iguales. Gana el juego quien logre obtener una situación donde cada columna tenga exactamente tres discos. Si Álvaro inicia el juego teniendo una sola columna con 1,000 discos, ¿puede, después de alguna sucesión de jugadas, ganar?

- ¿Por qué?

21. Dibuja un diagrama que cumpla con la descripción siguiente, usando el número mínimo de pájaros: “Dos aves por encima de un ave, dos aves por debajo de un ave y un ave entre dos aves”.

22. Tenemos 9 monedas idénticas a la vista, 8 son auténticas y pesan lo mismo, la falsa pesa menos. ¿Podrías identificar la moneda más ligera efectuando exactamente dos pesajes en la balanza?

- Si ahora son 27 monedas, ¿cuántos pesajes necesitas para encontrar la falsa?

Sugerencia: Considera el caso con las 9 monedas.

23. Ricardo, Luis y Sebastián tienen cada uno su deporte favorito, ─el tenis, el fútbol y el baloncesto─ y no hay dos de ellos que coincidan en el mismo deporte. A Ricardo no le gusta ni el fútbol ni el baloncesto, a Luis no le gusta el fútbol. ¿Cuál es el deporte favorito de cada uno de ellos?

24. Cinco personas tienen las siguientes masas corporales: 10, 20, 30, 40 y 50 kilogramos, respectivamente. Los cinco deben cruzar el río en un bote que sólo admite una carga de 50 a 70kg, es decir, ni menos de 50 ni más de 70. Observa que no todos pueden cruzar al mismo tiempo, ya que se rebasaría el peso límite del bote.

- Diseña una estrategia que indique cómo deberán cruzar bajo estas condiciones.

25. *MÁS SOBRE LA SECUENCIA FIBONACCI: Los patrones Fibonacci han fascinado a científicos y artistas durante siglos, ya que se han encontrado en numerosos aspectos de la naturaleza*.[5] En seguida te proponemos más actividades en torno a este tema.

Llamaremos a F_n el número de Fibonacci en la *n*-ésima posición de la secuencia. Por ejemplo:

$F_1 = 1$, es el primer término de la sucesión,

$F_2 = 1$, el segundo término,

$F_3 = 2$, el tercero,

$F_4 = 3$, el cuarto, y así sucesivamente.

[5] Por ejemplo, las abejas obreras macho se incuban de huevos que no han sido fertilizados; así, una abeja macho tiene sólo un padre: una hembra. Por otro lado, las abejas obreras hembra se incuban de huevos fertilizados, así, una abeja hembra tiene dos padres: un macho y una hembra. Observamos que en la primera generación hay una abeja, en la segunda hay una abeja, en la tercera hay dos abejas, etc. Éstos son los términos de la secuencia de Fibonacci. Además, empezando con la segunda generación, el número de abejas hembra forma la secuencia, y empezando con la tercera generación, el número de abejas macho forma la secuencia.

Observemos que:

$$F_1 + F_2 = F_3$$

$$F_2 + F_3 = F_4$$

$$F_4 + F_5 = F_6$$

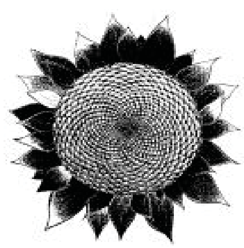
En general, $F_{(n-2)} + F_{(n-1)} = F_n$ para $n \geq 3$.

Aquí, únicamente observaremos los patrones; y no intentaremos proporcionar pruebas, las cuales se realizan por inducción matemática.

- El décimo sexto número de Fibonacci es 987 y el décimo séptimo es de 1597. ¿Cuál es el décimo octavo número de Fibonacci?
- Recuerda que F_n representa el número de Fibonacci en la *n*-ésima posición de la secuencia. ¿Cuáles son los únicos dos valores de *n* en los que $F_n = n$?
- $F_{23} = 28657 \; y \; F_{25} = 75025.$ ¿Cuál es el valor de F_{24} ?
- Si dos términos sucesivos de la secuencia de Fibonacci son impares, ¿el término siguiente es par o impar? Comprueba para cuatro parejas de números.
- Otro resultado, haciendo mención a la secuencia de Fibonacci, es que todo número natural puede expresarse como una suma de números de Fibonacci, donde un número no se usa más de una vez. Por ejemplo, 25 = 21 + 3 + 1. Expresa cada uno de los siguientes números de este modo:

a) 37 b) 40 c) 52

Fibonacci*, descubridor de la secuencia matemática que lleva su nombre, y un ejemplo de la misma en la naturaleza.*



ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA 3

Un camino circular está formado por 17 piedras que numeramos 0, 1, 2, 3, ... 16. Bruno empieza en la piedra número 0 y se mueve a la piedra número 1, luego da cuatro pasos hasta la piedra número 5, luego 9 pasos hasta la piedra número 14 y así continúa hasta que al final da 2005^2 pasos y se pone a descansar. ¿En qué piedra está descansando?

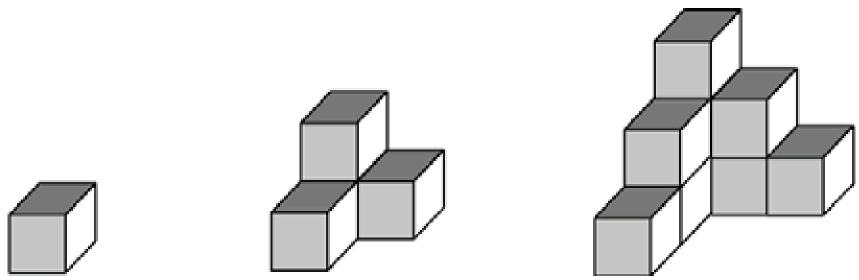
Sugerencia: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{(n(n+1)(2n+1))}{6}$.

🛠 ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA 4

Se escriben en una lista los múltiplos de 7 y 8, de la siguiente forma: 7, 8, 14, 16, 21, 24 ... y los números que sean múltiplos comunes se escriben una sóla vez. ¿Qué número aparece en la posición 2005?

🛠 ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA 5

En la siguiente composición se muestran tres arreglos de cubos que llamamos figuras 1, 2 y 3, respectivamente:



- ¿Cuántas caras podrás ver en la figura 10? ¿Cuántas en la figura *n*?

Sugerencia: Si la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos es constante, digamos *d*, a la progresión se le llama aritmética, y la suma de los primeros *n* términos es:

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=(n+1)a_0+n\frac{(n+1)}{2d}.$$

🛠 ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA 6

EL NUEVO ELEUSIS

En junio de 1959 apareció un artículo muy interesante en la revista Scientific American, *referente a un juego llamado* Eleusis. *El juego, el cual se juega con un par de mazos de cartas de poker, es nombrado de esa forma por los misterios eleusinianos antiguos: ritos religiosos en los cuales los iniciados aprendían las reglas secretas del culto. Este juego es de especial interés para los matemáticos y científicos, ya que provee un modelo de inducción, que es el núcleo conceptual del método científico*.

- Las siguientes son las reglas que no debes romper en el transcurso del juego... si quieres que tu alma sea salvada:

    1. El Oráculo, que es un jugador, debe hacer una regla secreta (patrón inductivo). La regla secreta debe escribirse sin ambigüedad en una hoja en blanco para futura confirmación. El Oráculo puede dar una ayuda antes de que el juego empiece.

    2. El Oráculo reparte 14 cartas del mazo doble a los jugadores (mínimo 4, máximo 8), y ninguna a él mismo.

    3. El Oráculo coloca una carta de inicio al extremo izquierdo de la superficie del juego. Para determinar qué jugador inicia el juego, el Oráculo cuenta en el sentido de las manecillas del reloj iniciando con él mismo y terminando en el jugador que iguale al número de la carta inicial.

4. El Oráculo dirá *correcto* si la tirada se apega a la regla y la carta se colocará a la derecha de la carta inicial sobre la línea principal (horizontal); o *incorrecto*, en cuyo caso la carta se colocará directamente debajo de la carta jugada en sentido vertical y se darán dos cartas más al jugador en turno.

5. Si algún jugador intuye que ha adivinado la regla puede jugar una cadena de 2, 3 ó 4 cartas en una sóla tirada. El jugador debe colocar las cartas traslapadas sobre la mesa, permitiendo que todos los jugadores observen su cadena.

6. Si una o más cartas en la cadena del jugador son incorrectas, el Oráculo declara que la cadena completa es incorrecta, y se le dan al jugador el doble de cartas que bajó, sin señalar las cartas incorrectas de la cadena.

7. Si el jugador en turno cree conocer la cadena secreta pero no tiene alguna carta que pueda ser jugada legalmente, deberá decir "paso" y mostrar su mano a todos los jugadores. Si el Oráculo declara que el jugador está en lo correcto, y su mano tiene 4 cartas o menos, éstas se regresan al mazo y el juego termina. Si el jugador está en lo correcto y tiene 5 cartas o más, su mano se regresa al mazo y se le devuelve una nueva mano con cuatro cartas menos de las que tenía inicialmente.

8. Si el jugador está en lo incorrecto al declarar que "pasa", el Oráculo toma una de sus cartas correctas y la pone en la línea principal. El jugador se queda con el resto de sus cartas y se le dan 5 más.

9. El juego termina si sucede cualquiera de estas dos situaciones:

> a) Se excede el tiempo de juego de una hora, en cuyo caso gana el jugador que tenga el menor número de cartas.
>
> b) Si algún jugador termina todas sus cartas antes del tiempo establecido.

▪ UNIDAD 2

ARITMÉTICA

PROPÓSITO

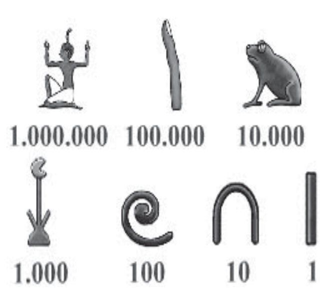
Comprenderás la importancia del desarrollo de procedimientos para manipular números, los cuales nos permitirán comparar o medir cantidades físicas que se utilizan en diversas actividades de la vida cotidiana. Asimismo, observarás que los números enteros son insuficientes para realizar mediciones más precisas y que "por lo tanto" es necesario conocer los números racionales o fracciones, con sus respectivas operaciones y aplicaciones. Reconocerás también los diferentes lenguajes y correspondencias de estos números, tales como decimales, proporciones y porcentajes.

INTRODUCCIÓN

El número, una de las creaciones más útiles que ha inventado la mente humana, puede considerarse dentro de las primeras abstracciones que surgieron de la necesidad de contar.

Estudiando las civilizaciones antiguas, podemos percibir la evolucion del número, desde los primeros trazos o símbolos representando cierta cantidad de objetos, hasta el agrupamiento de los mismos representado por nuevos símbolos, llegando finalmente al proceso más complejo: otorgar un valor al símbolo según la posición que ocupa. Es a partir de este momento que surge el desarrollo de la aritmética.

Los mayas y los romanos, por ejemplo, inventaron sistemas de numeración por agrupación. Los egipcios y los hindués desarrollaron sistemas posicionales, siendo la numeración indoarábiga la antecesor de los números que actualmente utilizamos. Aquí puedes apreciar tres ejemplos de sistemas de numeración: ***china***, ***egipcia*** y ***maya***:



En esta unidad trabajarás el desarrollo de la aritmética —recorriendo los números naturales, enteros y racionales— de manera similar a como fueron surgiendo a lo largo de la historia; es decir, a partir de necesidades sociales y del entorno, tales como contar, censar, distribuir, desarrollar o comerciar.

2.1 NÚMEROS ENTEROS

Los primeros números que surgieron fueron los **números naturales**, también llamados *de conteo*, los cuales son:

1, 2, 3, 4, 5, ...

Este conjunto de números se representa con el símbolo $\mathbb{N}$. Más formalmente:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$$

Los números naturales son insuficientes para resolver ciertos problemas, y es necesario ampliarlos a un conjunto más grande de números. El siguiente ejemplo muestra que tener solamente los números naturales no es suficiente:

- ¿Qué número natural tendremos que colocar en los siguientes espacios para que dé como resultado el número que se indica?

$$8+[\quad]=11$$

$$4+[\quad]=2$$

$$5-5=[\quad]$$

Es claro que, en el primero, se debe escribir el número *natural* 3 porque $8+3 = 11$. En el segundo caso, hay problemas para encontrar un número *natural* que sumado con 4 dé 2. Tal número no existe. De igual manera, no es posible encontrar ningún número *natural* que dé como resultado la resta de 5 consigo mismo.

Operaciones tan sencillas como éstas son imposibles de resolver con los números *naturales*. De esta manera, surge la necesidad de ampliar este conjunto a otro, llamado **números enteros***,* simbolizado por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

El conjunto de los **números enteros** está constituído por los números naturales, el cero y los *inversos aditivos*[6] de éstos:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

Este conjunto se puede representar en una recta numérica como sigue:

-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------

... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 ...

Los números a la izquierda del 0 son números **negativos**.
Los que se hallan a la derecha del 0 son números **positivos**.
El 0 no se considera ni positivo ni negativo.

[6] El **inverso aditivo** de un número natural $\boldsymbol{n}$ es el número $\boldsymbol{-n}$, de tal manera que $\boldsymbol{n+(-n)=0}$.

Observemos que este nuevo conjunto de números resuelve el problema anterior. Así:

$$4+[-2]=2$$

$$5-5=[0]$$

Podemos apoyarnos en una *recta numérica* para encontrar estos números:

- $4+[-2]=2$:

-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------

... -3 -2 -1 0 1 **2** 3 4 5 ...

- $5-5=[0]$:

-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------

... -3 -2 -1 **0** 1 2 3 4 5 ...

En el primer caso, avanzamos 4 unidades a la derecha y de ahí nos regresamos 2, dando como resultado 2. Para el segundo, avanzamos 5 unidades a la derecha y de ahí nos regresamos 5 unidades a la izquierda, llegando al número entero 0. La **recta numérica** nos ayuda a entender y visualizar las operaciones de suma de números enteros. Los números positivos avanzan a la derecha y los negativos a la izquierda. La medida de cada unidad, depende del tamaño que se fije.

En las siguientes actividades compara y discute tus resultados con tus compañeros.

ACTIVIDAD 1

Escribe el número entero adecuado en los siguientes espacios. Comprueba que efectivamente son correctos tus resultados dibujando una recta numérica para cada caso.

a) $[\quad]+4=1$

b) $5+[\quad]=-3$

c) $7+[\quad]=3$

d) $-6+[\quad]=-8$

e) $-9+[\quad]=-7$

La utilidad de los números negativos puede verse en situaciones que surgen en la vida diaria. Por ejemplo, necesitamos números negativos para expresar las temperaturas que descienden por debajo de cero. Las medidas sobre el nivel del mar se consideran positivas (altitudes) y las medidas que se hallan por debajo, negativas (profundidades). Si una compañía pierde dinero, sus ganancias son negativas.

De esta manera, cuando los problemas matemáticos tratan de pérdidas y ganancias, las ganancias pueden interpretarse como números positivos y las pérdidas como números negativos.

EJEMPLO 1

Pablo ganó 9 yardas en la primera jugada, y en la segunda perdió 12 yardas. ¿Cuántas yardas ganó o perdió?

SOLUCIÓN

Debemos sumar 9 positivo y 12 negativo: $9+(-12)=-3$. En total, Pablo perdió 3 yardas.

Como verás, si esta operación la realizas en una recta numérica, la posición final queda del lado izquierdo del cero, por eso el resultado es negativo.

🛠 ACTIVIDAD 2

El 23 de enero de 1943, la temperatura se elevó $49^o F$ en dos minutos en Spearfish, Dakota del sur. Si la temperatura inicial fue de $-4^o F$, ¿cuál fue la temperatura dos minutos más tarde?

🛠 ACTIVIDAD 3

En una serie de tres jugadas consecutivas, Herschel Walker ganó 4 yardas, perdió 3 yardas y perdió 2 yardas. ¿Qué número, positivo o negativo, representa su ganancia neta total de yardas para la serie de jugadas?

🛠 ACTIVIDAD 4

En un laboratorio se tienen dos termómetros con la misma escala, y que cambian de la misma forma (si uno aumenta dos grados, el otro también); pero uno de ellos está desfasado: cuando el primero marca 32°, el segundo marca -3°.

- ¿Cuánto marcará el segundo si el primero marca 150°?
- Y si el segundo marca -5°, ¿cuánto marcará el primero?

Los números enteros poseen ciertas propiedades de suma y multiplicación. Estas propiedades son sumamente importantes ya que de aquí se deriva el resultado correcto de las operaciones que realicemos:

Propiedades de los números enteros

Si a, b y c son números enteros, entonces:

- Se cumple la propiedad **conmutativa**:
  $a + b = b + a$ y $ab = ba$
- Se cumple la propiedad **asociativa**:
  $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$
- Existe un número entero 0 llamado **neutro aditivo**, tal que
  $a + 0 = a$ y $0 + a = a$
- Existe un número entero 1 llamado **neutro multiplicativo**, tal que
  $a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$
- Para cada número entero a existe un solo número entero $-a$ llamado **inverso aditivo**, tal que $a + (-a) = 0$ y $(-a) + a = 0$
- Se cumple la **propiedad distributiva**:
  $a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$

Según la propiedad inversa de la tabla anterior, el inverso aditivo de 7 es -7, el inverso aditivo de 1 es -1, el inverso aditivo de -5 es $-(-5)=5$, el inverso aditivo de -10 es , $-(-10)=10$, etc.

En general, se tiene que para cualquier número entero:

Si a es un númento **entero**, entonces $-(-a)=a$.

✍ EJEMPLO 2

El récord de la temperatura más alta en Estados Unidos: $134°F$, fue registrado en el Valle de la Muerte, California, en 1913. El récord de la temperatura más baja fue de $-80^o F$ en Prospect Creek, Alaska, en 1971. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura más alta y la más baja?

SOLUCIÓN

Debemos efectuar una resta entre el valor de la temperatura más alta con respecto al de la temperatura más baja para encontrar la diferencia entre ellas:

$$134-(-80)=134+80=214.$$

Observemos que en el segundo paso de esta operación, hemos usado la propiedad inversa anterior de signos. Así, la diferencia entre la temperatura más alta y la más baja es de $214^o F$.

🛠 ACTIVIDAD 5

Las dos tablas muestran las alturas de ciertas montañas y la profundidad de algunas depresiones:

Montaña	***Altura (pies)***	***Depresión***	***Profundidad (pies)***
Foraker	17 400	Filipinas	-32 995
Wilson	14 246	Caimán	-24 721
Pikes	14 110	Java	-23 376

a) ¿Cuál es la diferencia entre la altura del monte Foraker y la profundidad de la fosa de Filipinas?

b) ¿Qué tanto es más profunda la fosa de Caimán que la fosa de Java?

c) ¿Cuál es la diferencia entre la altura del monte Pikes y la profundidad de la fosa de Java?

🛠 ACTIVIDAD 6

Efectúa las siguientes sumas de números enteros.

a) $4-(-8)=$
b) $-7-(-10)=$
c) $4+(-9)=$
d) $-6+10=$
e) $-(-3)+3=$

2.1.1 OPERACIONES

■ SUMA DE NÚMEROS ENTEROS

Al sumar números enteros podemos apoyarnos en una recta numérica para visualizar y entender el comportamiento de los signos. Esto nos ayudará a comprender mejor esta operación.

- Si son **positivos** los dos números, es claro que la suma dará **positiva**.
- Si son dos números **negativos**, la suma será **negativa**.
- Si los números tienen **signo diferente**, efectúa la resta usual: resta el número menor del número mayor; el signo de esta suma es el que corresponde al signo del número mayor.

✍ EJEMPLO 3

Verifica las siguientes sumas de números enteros:

a) $-10+(-7)=-17$.

b) $-3+(-15)=-18$.

c) $-1+(-1)=-2$.

d) $-3+(-5)+(-2)=-10$.

e) $-2+(-1)+(-4)+(-6)=-13$.

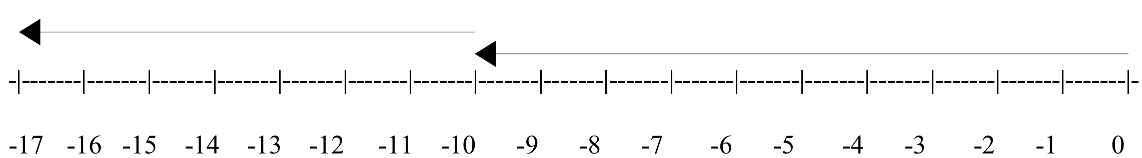
f) $10+(-8)=2$.

g) $14+(-5)=9$.

h) $12+(-13)=-1$.

i) $-10+6=-4$.

Estas operaciones se pueden comprobar utilizando la recta numérica. Por ejemplo, el inciso a):



Avanzamos 10 unidades a la izquierda del 0, y de ahí avanzamos 7 unidades más a la izquierda para llegar a -17, que es el resultado de la suma de -10 y -7.

🛠 ACTIVIDAD 7

Ejemplifica con una recta numérica las operaciones anteriores.

■ SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La sustracción o resta de números enteros es en realidad una suma. El resultado de la sustracción se conoce como **diferencia**.

✍ EJEMPLO 4

La diferencia entre 8 y 3 es 5, es decir: $8 - 3 = 5$.

Esto también se puede escribir como: $8 + (-3) = 5$.

De manera similar: $7 - 4 = 7 + (-4) = 3$.

Esto se puede resumir de la siguiente manera:

Si a, b son números enteros, $a - b = a + (-b)$.

Pongamos en práctica esta propiedad por medio de los siguientes ejemplos:

✍ EJEMPLO 5

Verifica las siguientes restas:

a) $18-20=18+(-20)=-2$.

b) $6-10=6+(-10)=-4$.

c) $10-10=10+(-10)=0$.

d) $-3-(-1)=-3+1=-2$.

e) $5-(-3)=5+3=8$.

f) $-7-4=-7+(-4)=-11$.

g) $-3-5-8=-3+(-5)+(-8)=-16$.

Puedes observar que en los incisos d) y e) ya no fue necesario pasarlos a suma, puesto que se aplicó directamente la primera ley de signos que vimos: $-(-a) = a$.

■ SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Con frecuencia las operaciones de sumas y restas se combinan en un mismo problema. Estas combinaciones se construyen con ayuda de los **signos de agrupación** (*paréntesis*: **( )**, *corchetes:* **[ ]**, etc.), que se utilizan para asociar o agrupar conjuntos de números relacionados por medio de una o varias operaciones aritméticas.

Cuando una operación se encierra entre signos de agrupación, ello nos indica que dicha operación tiene que efectuarse primero, después, con el resultado obtenido, realizar las demás operaciones indicadas. Por ejemplo:

- En la expresión $5 + (2 - 3)$, los *paréntesis* ordenan que primero se efectúe la diferencia $2 - 3$, y después se sume 5 a ese resultado.
- En la expresión $(13 - 8) - (15 + 3) + (4 + 2)$, los *paréntesis* señalan que primero se deben efectuar las operaciones señaladas dentro de ellos y después, con los resultados obtenidos, ejecutar el resto de las operaciones que se indican.
- Cuando uno o más signos de agrupación se encuentran encerrados dentro de otros, las operaciones deben efectuarse desde dentro hacia afuera, eliminando de uno en uno cada subagrupación.

✍ EJEMPLO 6

Para realizar la operación $15 + [5+(6+3)-(-8-2)]$, primero debemos efectuar las operaciones que se encuentran dentro del *corchete*.

Así, $15 + [5 + (6 + 3) - (- 8 - 2)] = 15 + [5 + 9 - (- 10)]$

$= 15 + [5 + 9 +10]$

$= 15 + [24]$

$= 39.$

🛠 ACTIVIDAD 8

Realiza las siguientes sumas de números enteros.

a) $- 5 + (- 3) + (- 2) =$

b) $10 + (- 5) =$

c) $- 7 + 2 =$

d) $3 + (- 12) =$

e) $8 - 5 =$

f) $3 - 10 =$

g) $- 1 - 8 =$

h) $1 - (4 - 7) =$

i) $(3 - 5) + (5 - 3) + 5 =$

j) $2 + [(- 2 + 8) + (5 - 11)] =$

■ MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

A fin de obtener de manera inductiva una regla para la multiplicación de un número entero positivo y uno negativo, observemos el patrón de los siguientes productos[7]:

$$\begin{aligned} &3\cdot 5=15\\ &3\cdot 4=12\\ &3\cdot 3=9\\ &3\cdot 2=6\\ &3\cdot 1=3\\ &3\cdot 0=0\\ &3\cdot(-1)=¿? \end{aligned}$$

- ¿Qué número debe asignarse al producto $3\cdot(-1)$, de tal manera que se mantenga el patrón anterior?

Los números a la izquierda del signo " = " disminuyen de 1 en 1, y los productos de la derecha decrecen de 3 en 3. Entonces, para mantener el patrón, el producto de la última multiplicación, es 3 unidades menos que 0, esto es – 3; es decir,

$$3\cdot(-1)=-3\,.$$

El patrón continúa si seguimos multiplicando los siguientes enteros negativos por

$$\begin{aligned} &3\cdot(-2)=-6\\ &3\cdot(-3)=-9\\ &3\cdot(-4)=-12\,. \end{aligned}$$

y así sucesivamente. De manera análoga,

$$\begin{aligned} &-3\cdot 2=-6\\ &-3\cdot 3=-9\\ &-3\cdot 4=-12\,. \end{aligned}$$

Para averiguar qué pasa con la multiplicación de dos números negativos, observemos el siguiente patrón:

$$\begin{aligned} &-4\cdot 3=-12\\ &-4\cdot 2=-8\\ &-4\cdot 1=-4\\ &-4\cdot 0=0\\ &-4\cdot(-1)=¿? \end{aligned}$$

Nótese que los números a la izquierda del signo de igualdad disminuyen de 1 en 1, y los productos de la derecha aumentan de 4 en 4. Entonces, el producto $-4\cdot(-1)$ debe ser 4 unidades más que 0, es decir,

$$-4\cdot(-1)=4\,.$$

[7] Recuerda que el producto es el resultado de la multiplicación de números.

Así que también se tiene

$$-4\cdot(-2)=8$$
$$-4\cdot(-3)=12$$
$$-4\cdot(-4)=16\,.$$

Podemos resumir esto como sigue:

Ley de los signos para la multiplicación	
$(+)(-)\ =\ -$	$(+)(+)\ =\ +$
$(-)(+)\ =\ -$	$(-)(-)\ =\ +$

Signos iguales:
El signo del producto de dos números enteros con el mismo signo es **positivo**.

Signos diferentes:
El signo del producto de dos números enteros con signo diferente es **negativo**.

✍ EJEMPLO 7

a) $-5\cdot 6=-30\,.$

b) $-5\cdot(-4)=20\,.$

c) $7\cdot(-2)=-14\,.$

d) $-3\cdot(4)+2(-6)=-12+(-12)=-24\,.$

e) $-2\cdot(-4)+6\cdot(-4)=8+(-24)=-16\,.$

f) $2\cdot[(-5+2)+(8-3)]=2\cdot[-3+5]=2\cdot[2]=4\,.$

g) $(-3)\cdot[(-2-3)-(-2-4)]=(-3)\cdot[-5-(-6)]=(-3)\cdot[-5+6]=(-3)\cdot[1]=-3\,.$

■ JERARQUÍA EN EL ORDEN DE LAS OPERACIONES

Cuando efectuamos operaciones con números enteros que son combinaciones de suma y multiplicación, comúnmente cometemos errores. Esto se debe a que queremos comenzar reduciendo la operación de izquierda a derecha, sin respetar el orden de las operaciones, y esto no siempre debe ser así.

Por ejemplo, la operación $5-3\cdot 2$.

Comúnmente empezaríamos restando $5-3$ y después multiplicando el resultado por 2.

Esto es: $5-3\cdot 2=2\cdot 2=4$.

Este es el **típico error** que cometemos.

En realidad, se debe efectuar primero la multiplicación de 3×2, y después se debe restar 5 a este resultado:

$$5-3\cdot 2=5-6=-1.$$

Vemos que los dos resultados no tienen nada que ver uno con otro.

Análogamente, para reducir $8\cdot 5-1$, se debe efectuar primero la multiplicación y después la resta.

Así:

$$8\cdot 5-1=40-1=39.$$

✍ EJEMPLO 8

a) $3-2(3-1)=3-2(2)=3-4=-1$.

b) $8+2(4-7)=8+2(-3)=8+(-6)=2$.

c) $1-2(5-2)=1-2(3)=1-6=-5$.

d) $4-3[2-2(3-5)]=4-3[2-2(-2)]=4-3[2+4]=4-3[6]=4-18=-14$.

e) $5-2[5-2(5-2)]=5-2[5-2(3)]=5-2[5-6]=5-2[-1]=5+2=7$.

Observemos que en cada una de las operaciones anteriores, primero tuvimos que reducir lo que hay dentro de cada paréntesis, y después respetar el orden de las operaciones: primero la multiplicación y después la suma o resta.

Al resolver **operaciones combinadas** de números enteros,
primero se resuelven los paréntesis, después las multiplicaciones, y finalmente sumas o restas.

Aquí ya no usamos el punto para indicar que estamos multiplicando. Se entiende que entre un número y un paréntesis o corchete debe efectuarse una multiplicación.

🛠 ACTIVIDAD 9

Realiza las siguientes operaciones:

a) $(-8)(-3) =$

b) $(-5)(4) =$

c) $(7)(-4) =$

d) $(-7)(-1) + 3(-8) =$

e) $(-3)(2) - 2(-3) =$

f) $(-5)[(-8+2) - (4-2)] =$

g) $8 - 4(5-2) =$

h) $(4-9)2 - 5 =$

i) $1 + 3[(8-9) + (10-8)] =$

j) $2 - 2[1 - 2(2-4)] =$

■ DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Ahora definiremos la **división** entre dos números enteros. Si *a*, *b*, y *c* son números enteros, donde $b \neq 0$, entonces,

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{significa} \quad a = bc.$$

Al número *c* se le llama **cociente**. Es decir, al resultado que se obtiene de dividir 2 números enteros se le denomina cociente.

✍ EJEMPLO 9

a) $\frac{9}{3} = 3$ porque $9 = 3 \cdot 3$.

b) $\frac{20}{4} = 5$ porque $20 = 4 \cdot 5$.

c) $\frac{15}{-5} = -3$ porque $15 = (-5)(-3)$.

d) $\frac{-15}{5} = -3$ porque $-15 = 5(-3)$.

A partir de estos ejemplos vemos que el resultado de la división de 2 números enteros con **signo igual** arroja un número entero **positivo**, y el resultado de la división de 2 números enteros con **signo diferente** es **negativo**. Esto lo podemos resumir de la siguiente manera:

Ley de los signos para la división	
$\frac{(+)}{(-)} = -$	$\frac{(+)}{(+)} = +$
$\frac{(-)}{(+)} = -$	$\frac{(-)}{(-)} = +$

Ahora analicemos el caso cuando el cociente es cero; para ello contestemos la siguiente pregunta:

- ¿Cuál es el cociente de dividir 0 entre cualquier número entero $a \neq 0$?

- La respuesta es 0, esto es:

$$\frac{0}{a}=0 \quad \text{porque} \quad 0=a\cdot 0.$$

0 dividido entre cualquier número entero diferente de cero es *0.*

- ¿Cuál es el cociente al dividir 8 entre 0?

Entonces nos debemos preguntar, ¿qué número multiplicado por 0 da 8? No existe tal número, ya que el producto de 0 por cualquier número entero es 0. Por lo que podemos deducir que no hay un cociente de $\frac{8}{0}$.

Por otra parte, 0 multiplicado por cualquier número entero, es 0. Entonces existe un número infinito de cocientes para la división $\frac{0}{0}$, lo cual no se permite, ya que el cociente de una división debe ser único. De esto podemos deducir que:

La división entre *0* no está definida.

- ¿Cuál es el cociente de $\frac{9}{7}$?, es decir, ¿qué número entero multiplicado por 7 da 9?

La respuesta es que no existe ningún número entero que multiplicado por 7 dé 9, por lo que no hay cociente para esta división; sin embargo, en el siguiente capítulo encontraremos un cociente.

Para ello, en la siguiente sección introduciremos el conjunto de los **números racionales**.

***Johann Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), matemático, astrónomo y físico alemán, fue uno de los más grandes científicos de todos los tiempos. Entre sus aportaciones se encuentran la solución de los Polígonos Regulares trazados a regla y compás, el Teorema fundamental del Álgebra, el Teorema de los Números Primos y la prueba de Reciprocidad Cuadrática. Su trabajo permitió el descubrimiento de la Geometría Hiperbólica de Bolyai; introdujo la Constante Gravitacional Gaussiana, desarrolló la Geodésica y colaboró con W. Weber en los terrenos de la electricidad y el electromagnetismo. El énfasis que otorgó a la aritmética nos permite comprender por qué se dice: "La Matemática es la reina de las ciencias, y la aritmética, la reina de las matemáticas."*

■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

1. Efectúa las siguientes operaciones, indicando en la recta numérica la operación realizada.

a) $7 + (-4) =$

b) $-3 + (-1) =$

c) $-10 - (-5) + 5 =$

d) $-6 - (-6) =$

e) $-20 + 12 =$

f) $6 - 12 =$

g) $-8 - (-10) =$

h) $5 - 6 + (-3) - (-4) =$

2. Efectúa las operaciones de números enteros.

a) $2 - (3 - 2) + (4 - 8) - (-7 - 2) =$

b) $-15 - (-3) + 6 + (-7) - [-8 - (-3)] + 4 =$

c) $7 + (-4 - 8) - 5 - (7 - 3) - 4[3 - (-1)] + 1 =$

d) $5(6 - 5) + 2(-1 + 3) + 7(6 - 6) =$

e) $-3 + 6 - 3[8 - (-8)] =$

f) $-3 + 2(8 - 11) - 3(-3 + 3) - 3 =$

g) $-4 - 4(3 - 1) + 5(-2 - 2) =$

h) $3 + (4 - 7) + (8 - 4) + (-1 - 3) + (0 - 2) =$

i) $-(-3 + 8) - (2 - 7) - (-3 - 1) - (-4) =$

j) $2 - [-(3 - 8) + (4 - 7) - (-3 - 3) + 1] =$

2.2 NÚMEROS RACIONALES

Se cree que fueron los egipcios quienes usaron por primera vez las fracciones, utilizando fracciones de la forma $\frac{1}{n}$, por ejemplo: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc. Además introdujeron fracciones del tipo $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, etc. , con las que consiguieron hacer cálculos fraccionarios de todo tipo.

Sin embargo, más adelante los babilonios desarrollaron un eficaz sistema de notación fraccionaria que les permitió establecer aproximaciones decimales verdaderamente sorprendentes. Para ellos fue relativamente fácil conseguir aproximaciones precisas en sus cálculos gracias al uso de su *sistema de notación fraccionaria*. Este modelo perduró durante siglos como el mejor de que dispuso civilización alguna hasta la época del Renacimiento. Los babilonios fueron también los primeros en utilizar una notación racional[8], expresando los números en forma parecida a la actual.

En esta sección conocerás los números racionales, aprenderás a efectuar operaciones aritméticas con ellos, y los utilizarás para la solución de problemas prácticos.

2.2.1 LOS NÚMEROS RACIONALES REPRESENTANDO PARTES DE UN TODO

Hasta ahora, únicamente hemos trabajado con los números naturales y con los números enteros. Frecuentemente, en la vida cotidiana se presentan problemas en los que las fracciones surgen naturalmente.

Por ejemplo, si tomamos como unidad un metro, esta unidad se puede dividir en 10 subunidades denominadas decímetros. Cada una de ellas representa la fracción $\frac{1}{10}$ de metro. Cada decímetro se puede dividir, a su vez, en 10 subunidades denominadas centímetros, es decir, un centímetro corresponde a $\frac{1}{100}$ parte de un metro.

Con los conjuntos de números conocidos hasta ahora (naturales y enteros), no podríamos efectuar operaciones tales como la indicada con la fracción $\frac{9}{5}$, o encontrar un número *x* que cumpla que $3x = 5$.

Con el conjunto de las fracciones se amplía el conjunto de números que podemos utilizar para calcular operaciones, o bien, plantear y resolver diversos problemas.

Para las siguientes actividades, reúnete con tus compañeros y discute los procedimientos y respuestas.

[8]La expresión de una fracción poniendo el numerador arriba y el denominador abajo se la debemos a los hindúes; pero ellos no ponían, entre ambos números, la línea horizontal que ponemos en la actualidad: esa línea se la debemos a los árabes.

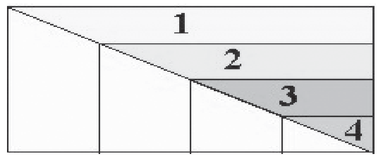
🛠 ACTIVIDAD 10

Se va a repartir una pizza entre 3 personas, incluyéndote, de manera que les tocará la misma cantidad a cada una. ¿Te tocará más o menos de la mitad?

- Explica tu respuesta.

🛠 ACTIVIDAD 11

Observa el rectángulo y las partes sombreadas:



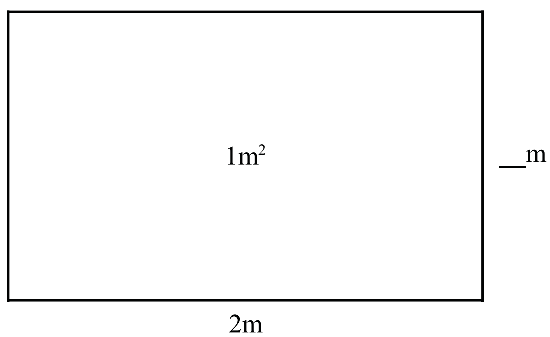
- ¿De qué manera podrías expresar numéricamente las partes sombreadas 1, 2, 3 y 4 con respecto al rectángulo mayor?

- ¿Qué fracción del rectángulo original representa cada una de las partes numeradas?

🛠 ACTIVIDAD 12

Para realizar un cartel, un estudiante necesita un rectángulo de cartulina con las siguientes características:

- área: 1m^2
- largo: 2m^2



- ¿Cuál deberá ser la medida del ancho de la cartulina para que cumpla las características requeridas?

Como te habrás dado cuenta, para dar respuesta a las actividades anteriores necesitamos de un conjunto más amplio de números con los cuales trabajar. A estos números, que has usado y que seguramente recordaste, se les llama *números racionales*[9] o *fracciones*:

Conjunto de los números racionales:

Un **número racional** es un número que se puede expresar como $\frac{a}{b}$,

donde *a* y *b* son números enteros, y $b \neq 0$.

[9] A estos números se les conoce también como *fracciones*, y el nombre resulta razonable puesto que ayudan a expresar cantidades que *no son enteras* necesariamente.

Ejemplos de números racionales:

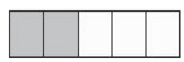
$$\frac{3}{4}, \quad \frac{-1}{7}, \quad 3\frac{2}{17}, \quad 0=\frac{0}{5}, \quad -12, \quad \frac{-12}{1}, \quad 3.19=\frac{319}{100}.$$

En particular, todos los números enteros son racionales, ya que se pueden escribir de la forma :

$$-3=\frac{-3}{1}, 6=\frac{6}{1}, \quad \text{etc.}$$

Al escribir una fracción como $\frac{3}{5}$, al **3** le llamaremos **numerador**, y al **5**, **denominador**. El **5** significa que dividimos un todo en **5** partes, y el **3** indica cuántas de estas partes tomamos para construir la fracción.

Por ejemplo, en la figura:



El rectángulo está dividido en 5 partes iguales y 2 de ellas están sombreadas, por lo que podemos decir que la parte sombreada representa las dos quintas partes del área total.

Esto lo escribimos como: $\frac{2}{5}$.

Observa que en la definición de número racional, el denominador no puede ser igual a cero, ya que la división entre cero no está definida.

ACTIVIDAD 13

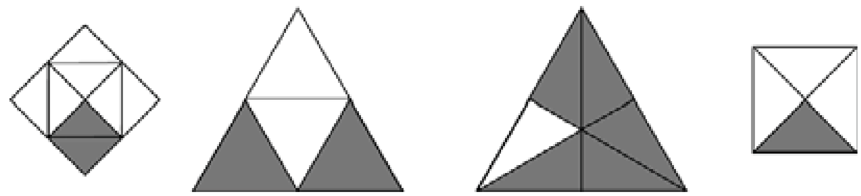
El mes de abril tiene 30 días. Imagina que el mes inicia en lunes. Completa la tabla:

Días	***Fracción del mes que representa***
Jueves	
Lunes	
Sábados y Domingos	
Miércoles	$\frac{4}{30}$

- ¿Qué día o días tienen mayor representatividad en el mes de abril?
- ¿Serán los mismos días para el mes de mayo?

🛠 ACTIVIDAD 14

Señala la fracción sombreada correspondiente a cada figura:



Rombo ***Triángulo 1*** ***Triángulo 2*** ***Cuadrado***

Figura	*Fracción*
Rombo	
Triángulo 1	
Triángulo 2	
Cuadrado	

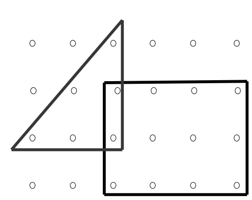
- Imagina que únicamente está sombreada una porción del triángulo 1. Como sabes, esto representa $\frac{1}{4}$ del triángulo original. ¿Es este valor equivalente a la fracción sombreada del cuadrado?
- Explica tu respuesta.

🛠 ACTIVIDAD 15

Se tiene un terreno en forma rectangular que se ha dividido en seis partes iguales, y sólo se ha sembrado en cuatro de ellas. ¿Qué parte del terreno no se ha sembrado? Puedes apoyarte en un dibujo.

🛠 ACTIVIDAD 16

Escribe un número racional que represente los siguientes conjuntos de puntos:



- Los del interior del rectángulo como parte del total de puntos mostrados.
- Los del interior del triángulo como parte del total.
- Los de la unión del triángulo y el rectángulo como parte del total.

2.2.2 FRACCIONES EQUIVALENTES Y SIMPLIFICACIÓN

¿Pueden dos fracciones representar el mismo número? Ésta y otras preguntas serán respondidas en esta sección. Indagaremos cómo, para un número racional, existen fracciones que representan ese mismo número. Hablaremos de *fracciones equivalentes* cuando tengamos fracciones que valen exactamente lo mismo, aunque se escriban de diferente manera.

Además, muchas veces nos va a interesar una fracción; pero escrita en su forma más simple. Recurriremos entonces a la *simplificación de fracciones*.

🛠 ACTIVIDAD 17

Para responder a la pregunta original, considera los siguientes cuadrados iguales:

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{12}$

Cuadrado 1 ***Cuadrado 2*** ***Cuadrado 3***

- ¿Qué fracción del cuadrado 1 no está sombreada?
- ¿Qué fracción del cuadrado 2 no está sombreada?
- ¿Y del cuadrado 3?
- ¿Son iguales las partes sombreadas de cada uno de los cuadrados?
- ¿Por qué?

🛠 ACTIVIDAD 18

Traza una recta numérica.

- ¿Podrías indicar dónde se encuentra $\frac{1}{2}$?
- ¿Y dónde $\frac{2}{4}$?
- De igual manera, cuenta en la recta numérica $\frac{2}{3}$ y también indica dónde está ubicado $\frac{6}{9}$.
- ¿Qué observaste?
- ¿Son el tamaño de tu recta numérica y sus divisiones iguales a los de tus compañeros?
- ¿Afectó lo anterior para realizar la actividad?

Con la 🛠 **ACTIVIDAD 17**, comprobaste que las fracciones

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \quad \text{y} \quad \frac{3}{12}$$

representan el mismo número. Gráficamente comprobaste en la 🛠 **ACTIVIDAD 18**, que tanto

$$\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{2}{4}, \quad \text{como} \quad \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{6}{9}.$$

representan la misma fracción, independientemente de que no hayas conocido el tamaño o las divisiones de las rectas numéricas del resto de tus compañeros.

Decimos que dos fracciones son *equivalentes* bajo la siguiente consideración:

> Las **fracciones equivalentes** son las que representan el mismo valor.
> Tienen distinto numerador y denominador; pero valen lo mismo.

- De esta manera, ¿cuántas fracciones equivalentes tiene una fracción?

🛠 ACTIVIDAD 19

Considera por ejemplo $\frac{1}{3}$. Si multiplicas su numerador y denominador por un mismo número distinto de cero... ¿Obtienes una fracción equivalente?

- Explica tu respuesta.

En ese sentido, se puede construir una cantidad *ilimitada* de fracciones equivalentes entre sí: Dada una fracción $\frac{a}{b}$, puedes construir la cantidad que desees de fracciones equivalentes, simplemente multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número entero, esto es:

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b};\ k \text{ número entero y } k \neq 0.$$

Por ejemplo:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \ldots$$

$$\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \frac{3}{21} = \frac{4}{28} = \ldots$$

Además, observa que cuando tienes dos fracciones equivalentes, al multiplicar *cruzado* el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, y el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera, los resultados coinciden.

A esto se llama *igualdad de fracciones*. Es decir:

Equivalencia de fracciones:

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones, entonces $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si y solamente si $ad=bc$, $b,d\neq 0$.

🛠 ACTIVIDAD 20

Simplifica las siguientes fracciones, y después acomódalas en la tabla, de manera que correspondan a su fracción equivalente de la columna X. Observa el ejemplo resuelto:

$\frac{7}{35}$	$\frac{21}{28}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{14}{21}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{4}{20}$
$\frac{7}{7}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{16}$

Columna X	***Fracciones equivalentes***				
$\frac{1}{1}$					
$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$					
$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{35}$				
$\frac{1}{7}$					
$\frac{3}{4}$					

- Compara tu resultado con el resto de tu equipo.

✍ EJEMPLO 10

a) Determina si $\dfrac{17}{41}$ y $\dfrac{340}{820}$ corresponden a la misma fracción.

Como $17 \cdot 820 = 13940$ y $41 \cdot 340 = 13940$, entonces las fracciones son equivalentes, y las representamos como:[10]

$$\frac{17}{41} = \frac{340}{820}.$$

b) Determina si $\dfrac{4}{12}$ y $\dfrac{1}{5}$ son equivalentes.

Al multiplicar $4 \cdot 5$ y $12 \cdot 1$, resulta que $4 \cdot 5 \neq 12 \cdot 1$, entonces las fracciones no son equivalentes. Sin embargo, podemos determinar cuál de las dos fracciones es mayor. Puesto que al multiplicar *cruzadas* las fracciones el resultado mayor es es el de la izquierda, resulta que la fracción de la izquierda es la mayor. Esto lo representamos como

$$\frac{4}{12} > \frac{1}{5}.$$

✍ EJEMPLO 11

Encuentra el número n para el cual $\dfrac{n}{2} = \dfrac{5}{10}$ y $\dfrac{1}{8} = \dfrac{-5}{n}$.

Para que $\dfrac{n}{2} = \dfrac{5}{10}$ se necesita que $(n)(10) = (5)(2)$ con lo que $n = \dfrac{(5)(2)}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$.

Para que $\dfrac{1}{8} = \dfrac{-5}{n}$ se necesita que $(1)(n) = (8)(-5)$ con lo que $n = 8(-5) = -40$.

Hemos visto cómo, a partir de una fracción, se pueden construir fracciones equivalentes con numeradores y denominadores mayores a la original. Sin embargo, también es posible hacer el proceso inverso. Esto es: partiendo de una fracción, simplificarla o reducirla a otra más simple.

> Podemos utilizar la igualdad $\dfrac{a \cdot k}{b \cdot k} = \dfrac{a}{b} \quad k \neq 0$ para **simplificar fracciones**,
> buscando *factores comunes*[11] en el numerador y denominador, y cancelando esos factores.

✍ EJEMPLO 12

La fracción $\dfrac{18}{24}$ es equivalente a $\dfrac{3}{4}$. Sin embargo, la fracción $\dfrac{3}{4}$ es más simple y más fácil de manejar que $\dfrac{18}{24}$. Analicemos paso a paso cómo podemos simplificar la fracción $\dfrac{18}{24}$ y convertirla en $\dfrac{3}{4}$.

[10] Una fracción también se puede interpretar como una razón, y a la igualdad de dos razones se le conoce como una proporción. (Estos conceptos se verán más adelante).
[11] Pregunta a tu profesor más acerca de los *factores comunes*.

Observa que los dos números 18 y 24 son pares, por lo tanto podemos dividir entre 2 a cada uno (sacar la mitad) y obtener una fracción equivalente, esto es:

$$\frac{18}{24}=\frac{9\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{9}{12}.$$

(Recuerda que $\frac{2}{2}=1$)

Con la fracción que nos queda $\frac{9}{12}$, intentamos repetir el procedimiento; sólo que ahora no podemos dividir entre 2 (ya que 9 no es número par); sin embargo, tanto el 9 como el 12 tienen un factor común que es el 3.

De este modo:

$$\frac{9}{12}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{3}{4}.$$

(Recuerda que $\frac{3}{3}=1$)

Si quisiéramos continuar con el mismo procedimiento no sería posible, debido a que 3 y 4 no tienen factores comunes, por lo tanto $\frac{3}{4}$ es la expresión más simple.

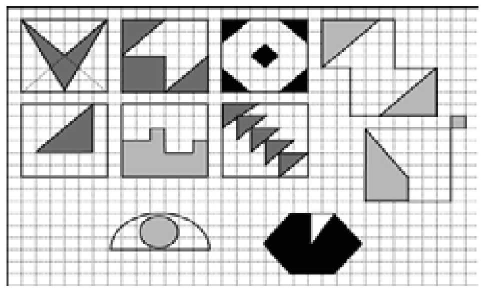
🛠 ACTIVIDAD 21

Simplifica las fracciones $\frac{12}{36}, \frac{50}{150}, \frac{1575}{165}$. Compara tus resultados con tus compañeros.

Reúnete en equipos para trabajar en los siguientes ejercicios. Discute los resultados con el resto de tus compañeros y con tu profesor.

🛠 ACTIVIDAD 22

Expresa en forma de fracción la parte sombreada de las siguientes figuras:



- ¿Hay fracciones equivalentes?
- ¿Por qué?

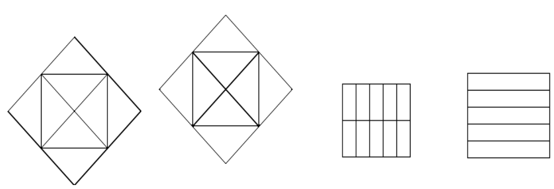
🛠 ACTIVIDAD 23

Expresa como fracción:

a) 3 días y 18 horas de una semana.
b) 5 horas y 30 minutos de una semana.
c) ¿Hay una sola manera de expresar estas cantidades?
d) Justifica tu respuesta.

🛠 ACTIVIDAD 24

Para cada una de las siguientes figuras geométricas, sombrea la fracción indicada:

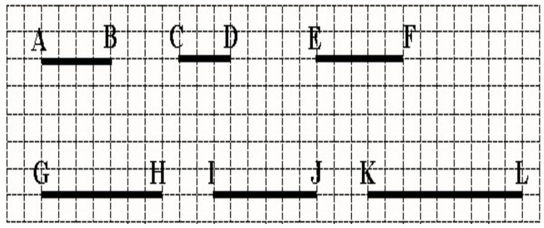


$\frac{2}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{5}{5}$

- Si $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, ¿cómo podrías interpretarlo con lo sombreado en la primera figura geométrica?

🛠 ACTIVIDAD 25

Aquí tienes varios segmentos dibujados en papel cuadriculado:



a) Compara la longitud de $\overline{AB}$ con las longitudes de los otros segmentos. Por ejemplo, $\overline{AB}=\frac{4}{5}\overline{EF}$.

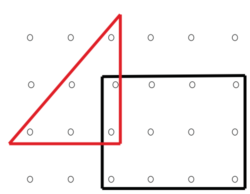
$\overline{AB}$ =____ $\overline{CD}$
$\overline{AB}$ =____ $\overline{GH}$
$\overline{AB}$ =____ $\overline{IJ}$
$\overline{AB}$ =____ $\overline{KL}$

b) Ahora, comparemos la longitud de cada uno de los segmentos con $\overline{AB}$. Por ejemplo, $\overline{CD}=\frac{3}{4}\overline{AB}$.

$\overline{EF}$ =____ $\overline{AB}$
$\overline{GH}$ =____ $\overline{AB}$
$\overline{IJ}$ =____ $\overline{AB}$
$\overline{KL}$ =____ $\overline{AB}$

🛠 ACTIVIDAD 26

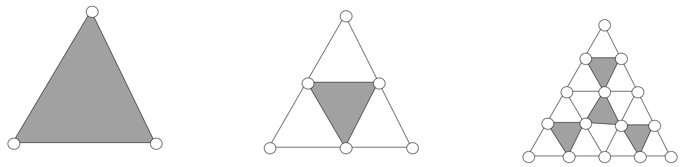
Refiriéndonos otra vez a la siguiente figura, expresa en fracciones los incisos que se te piden:



a. Los puntos que son comunes al triángulo y al rectángulo, como parte del total.
b. Los del interior del rectángulo, como parte de la unión del triángulo y del rectángulo.
c. Encuentra un arreglo de puntos y una figura cuyo interior contenga $\frac{3}{7}$ del total de puntos, y otra figura que contenga $\frac{12}{21}$ de la cuadrícula original. ¿Qué observas?
d. ¿Es posible hacer una figura que contenga $\frac{4}{3}$ del total de puntos? ¿Por qué?

🛠 ACTIVIDAD 27

Encuentra el número racional que representa el área sombreada como parte del área total de cada figura. Compara con el número que representa el área blanca.



- ¿Qué ocurre con el área sombreada cuando avanzamos en el patrón?
- ¿Qué ocurre con el área sin sombrear?

🛠 ACTIVIDAD 28

Encuentra cinco números racionales entre 1 y 2.

- ¿Cuántos más puedes encontrar? ¿Por qué?

🛠 ACTIVIDAD 29

Para cada una de las tercias de números racionales, identifica cuáles son iguales o equivalentes.

a) $\frac{17}{41}, \frac{289}{697}, \frac{714}{1682}$

b) $\frac{438}{529}, \frac{19}{23}, \frac{323}{391}$

c) $\frac{11}{91}, \frac{111}{911}, \frac{253}{2093}$

🛠 ACTIVIDAD 30

Dadas las siguientes fracciones, escribe otras tres que representen a la misma fracción.

$$\frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{-5}{7}, \frac{-7}{11}$$

🛠 ACTIVIDAD 31

Simplifica las siguientes fracciones.

$$\frac{20}{34}, \frac{111}{185}, \frac{172}{252}, \frac{270}{150}, \frac{648}{1444}, \frac{3600}{5004}, \frac{15}{120}, \frac{88}{24}$$

🛠 ACTIVIDAD 32

Encuentra el valor faltante para que las siguientes fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{5}{4} = \frac{10}{x}$

b) $\frac{-1}{3} = \frac{x}{9}$

c) $\frac{7}{4} = \frac{x}{-24}$

- Observa las siguientes rectas numéricas y escribe en los espacios las fracciones correspondientes:

-|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-

$0 \qquad\qquad\qquad \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad 1$

-|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-

$0 \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{2}{4} \qquad \boxed{} \qquad \boxed{}$

-|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-

$0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} \quad \frac{8}{8}$

🛠 ACTIVIDAD 33

Encuentra el número racional que esté a la mitad de la distancia entre los números:

a) $\frac{-2}{3}$ y $\frac{-5}{6}$

b) -3 y $\frac{-5}{2}$

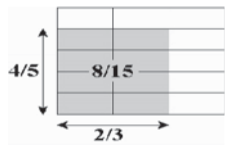
c) $\frac{5}{6}$ y $\frac{9}{13}$

d) $\frac{4}{9}$ y $\frac{14}{16}$

2.2.3 OPERACIONES CON RACIONALES

■ 2.2.3.1 MULTIPLICACIÓN

Observa la figura. A partir de ella quisiéramos calcular la operación $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$.



- ¿Recuerdas cómo calcular el área de un rectángulo?
- ¿Qué fracción del largo del rectángulo mayor representa el largo del rectángulo sombreado?
- ¿Qué fracción del ancho del rectángulo mayor representa el ancho del rectángulo sombreado?

Efectivamente, el rectángulo sombreado tiene de base $\frac{2}{3}$ del largo del rectángulo mayor, y de altura $\frac{4}{5}$ del ancho del rectángulo mayor. Así que su área será entonces $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$ del rectángulo mayor.

- Ahora, cuenta de cuántos rectángulos pequeños está formado el rectángulo mayor.
- ¿Con cuántos está formado el rectángulo sombreado?
- ¿Cómo expresas este resultado en fracciones?

Como te habrás dado cuenta, la parte sombreada representa los $\frac{8}{15}$ del área del rectángulo mayor. Concluímos entonces que $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$. Observemos que el resultado también se obtiene multiplicando los dos numeradores y los dos denominadores.

Multiplicación de fracciones:

Para **multiplicar** dos o más números racionales, multiplicamos sus numeradores y después sus denominadores respectivamente: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{b}, d\neq 0.$
El producto así obtenido es otro número racional.

✍ EJEMPLO 13

Multiplica y simplifica a su mínima expresión las siguientes fracciones:

a) $\frac{6}{13}$ y $\frac{5}{12}$

b) $\frac{25}{392}$ y $\frac{49}{50}$

SOLUCIONES

a) $\frac{6}{13}\cdot\frac{5}{12}=\frac{6\cdot 5}{13\cdot 12}=\frac{30}{156}$, y simplificando $\frac{30}{156}=\frac{30\div 6}{156\div 6}=\frac{5}{26}$.

b) $\frac{25}{392}\cdot\frac{49}{50}=\frac{25\cdot 49}{392\cdot 50}=\frac{1225}{19{,}600}$, y simplificando $\frac{1225}{19{,}600}=\frac{1225\div 1225}{19{,}600\div 1225}=\frac{1}{16}$.

✍ EJEMPLO 14

Multiplica $\left(\frac{3}{4}\right)\left[\left(\frac{-3}{7}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$.

SOLUCIÓN

Resolviendo primero el segundo paréntesis, tenemos que $\left[\left(\frac{-3}{7}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\right]=\frac{3}{14}$.

Luego $\left(\frac{3}{4}\right)\left[\left(\frac{-3}{7}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\right]=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{14}\right)=\frac{9}{56}$.

Reúnete en equipos para trabajar la siguiente actividad. Comparte tus respuestas.

ACTIVIDAD 34

Resuelve las siguientes multiplicaciones de fracciones y simplifica tu resultado.

a) $6\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)5$

b) $\left(\frac{-2}{9}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$

e) $\left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{19}{24}\right)$

c) $\left(\frac{15}{16}\right)\left(\frac{-5}{12}\right)$

f) $\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$

ACTIVIDAD 35

Intenta plantear y resolver los siguientes problemas. Si lo deseas, puedes apoyarte con dibujos.

- Carlos ha comprado la tercera parte de una calabaza que pesa 6 kilogramos, y le da la mitad a su vecino. ¿Cuánto le dio? ¿Qué fracción de la calabaza le regaló?
- Una familia tiene en su casa $\frac{3}{4}$ de kilogramo de higos. En el almuerzo se comen la quinta parte y en la cena el resto. ¿Cuánto han comido en cada comida?
- Las $\frac{4}{5}$ partes de un número es igual a 40. ¿Cuánto serán las $\frac{3}{10}$ partes de ese número?

■ 2.2.3.2 DIVISIÓN

A partir de la multiplicación de fracciones, que ya sabes efectuar, aprenderás cómo dividir fracciones. Para ello nos será útil una definición:

Dos números racionales son **recíprocos** uno del otro si su producto es 1. Por ejemplo,

$\frac{1}{3}$ y 3 son recíprocos ya que $\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{3}{3} = 1$.

En general, el **recíproco** de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, donde $a, b \neq 0$.

Ahora observa que $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 3 \div 5$. Así que dividir 3 entre 5, es lo mismo que multiplicar 3 por el recíproco de 5 que es $\frac{1}{5}$. En resumen:

División de fracciones:

Para dividir dos números racionales, se multiplica el primer número por el recíproco del segundo, es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad b, c, d \neq 0.$$

Observación: Existe una manera más simple de ver la división, y es multiplicar *en cruz* las fracciones, es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Otra manera de representar la división de fracciones, que comúnmente se conoce como *sandwich*, es:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

✍ EJEMPLO 15

Efectúa las siguientes divisiones entre números racionales:

a) $5 \div \frac{2}{15}$

b) $\frac{25}{392} \div \frac{50}{49}$

SOLUCIÓN

a) $\frac{5}{1} \div \frac{2}{15} = \frac{5 \cdot 15}{1 \cdot 2} = \frac{75}{2}$.

b) $\frac{25}{392} \div \frac{50}{49} = \frac{25 \cdot 49}{392 \cdot 50} = \frac{1225}{19600} = \frac{1225 \div 5}{19600 \div 5} = \frac{245}{3920} = \frac{245 \div 5}{3920 \div 5} = \frac{49}{784} = \frac{49 \div 49}{784 \div 49} = \frac{1}{16}$.

✍ EJEMPLO 16

Efectúa la multiplicación $\left[\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{9}$ y simplifica el resultado.

SOLUCIÓN

$$\left[\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{9} = \frac{-2}{15} \div \frac{2}{9}$$

$$= \frac{(-2)9}{(15)2} = \frac{-18}{30}$$

$$= \frac{-18 \div 6}{30 \div 6} = \frac{-3}{15}.$$

🛠 **ACTIVIDAD 36**

Resuelve las siguientes operaciones de fracciones y simplifica tu resultado. Recuerda compartir los resultados con tus compañeros.

a) $\frac{3}{5} \div \frac{10}{11}$

f) $\frac{-10}{3} \div \frac{5}{9}$

b) $\left[3\left(\frac{4}{12} \div \frac{5}{12}\right)\right] \div \frac{1}{3}$

g) $\left(\frac{5}{12} \div \frac{4}{3}\right)\frac{1}{2}$

c) $\dfrac{\frac{11}{5}}{\frac{3}{20}}$

h) $\dfrac{\frac{1}{8}}{4}$

d) $3\left(\frac{2}{7} \div \frac{13}{12}\right)$

i) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{7}}\left(\frac{1}{3} \div \frac{-3}{5}\right)$

e) $\dfrac{1}{\frac{1}{100}}$

j) $\dfrac{1}{\frac{1}{10}} \cdot 100$

🛠 ACTIVIDAD 37

Intenta plantear y resolver los siguientes problemas. Si lo deseas, puedes apoyarte con dibujos.

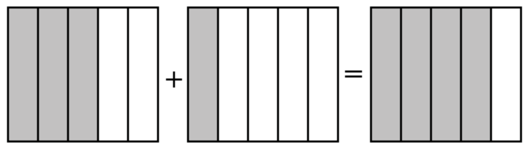
- ¿Cuántas copas de $\frac{1}{8}$ de litro se pueden llenar con una botella de $\frac{3}{4}$ de litro?
- Una tabla mide 6 metros de longitud. ¿Cuál es la longitud de cada pieza al cortarla en cinco pedazos iguales?
- Una persona ha gastado $\frac{7}{9}$ de su sueldo mensual. Si le quedan \$3000.00, ¿cuánto gana por mes?

■ 2.2.3.3 SUMA Y RESTA

Por último, aprenderemos cómo calcular la suma y resta de fracciones. Para ello, necesitamos dividir la suma de fracciones en dos casos.

CASO 1: FRACCIONES CON EL MISMO DENOMINADOR

Considera los dibujos:



$$\frac{3}{5} \quad + \quad \frac{1}{5} \quad = \quad \frac{4}{5}$$

Como las regiones sombreadas están divididas en quintas partes del área considerada, para calcular la suma de estas regiones, basta sumar la cantidad de quintas partes que hay en el total de las regiones. Es decir, la suma de las áreas es: $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ de área.

Suma y resta de fracciones con igual denominador:

Para sumar o restar fracciones que tienen el **mismo denominador**,
se suman o restan los numeradores y permanece el mismo denominador.

Esto es:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\,,b\neq 0 \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}\,,b\neq 0\,.$$

✍ EJEMPLO 17

Calcula las sumas y restas de fracciones; simplificando tu resultado.

a) $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}$ b) $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}$ c) $\left(\frac{3}{7}-\frac{8}{7}\right)\left(\frac{-1}{5}\div\frac{2}{3}\right)$

SOLUCIONES:

a) $\frac{3}{8}+\frac{7}{8} = \frac{3+7}{8}=\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

b) $\frac{7}{5}-\frac{2}{5} = \frac{7-2}{5} = \frac{5}{5}=1$.

c) Para esta operación, primero se resuelve lo que está dentro del paréntesis:

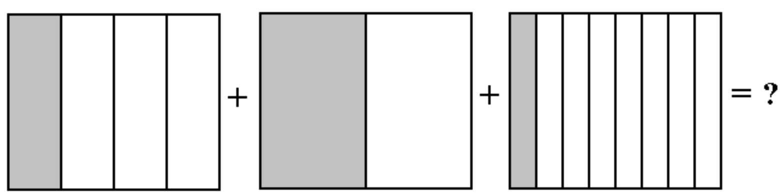
$$\frac{3}{7}-\frac{8}{7} \;=\; \frac{3-8}{7}=\frac{-5}{7} \quad \text{y} \quad \frac{-1}{5}\div\frac{2}{3} \;=\; \frac{(-1)3}{(2)5} \;=\; \frac{-3}{10}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{7}-\frac{8}{7}\right)\left(\frac{-1}{5}\div\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{-5}{7}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)\\ &= \frac{15}{70}\\ &= \frac{(5)3}{(5)14}\\ &= \frac{3}{14}.\end{aligned}$$

CASO 2: FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR

Deseamos calcular la suma de las regiones sombreadas que se encuentran en la parte de abajo.



$$\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{8} \quad = \; ?$$

Observa que si reescribimos las fracciones con un denominador *común*, la suma se reduce al caso 1. Esto es, necesitamos encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$, todas con el mismo denominador: En este caso, elegiremos al 8 como denominador, ya que 4 y 2 son sus múltiplos.

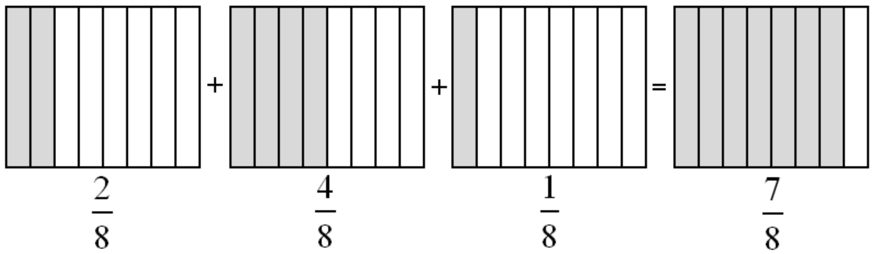
Así que:

$$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{2}{8}, \qquad \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{4}{8} \quad \text{y} \quad \frac{1}{8} \quad \text{conviene que permanezca igual.}$$

Con ello,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

Geométricamente, la operación se ve así:



Suma y resta de fracciones con diferente denominador:

Para sumar o restar dos fracciones de **distinto denominador**, se cambian las fracciones a denominador común.

Esto es:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}\ y\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd};\ b\neq d,\ b,\ d\neq 0.$$

Resumen

Dados los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$,
la suma y resta entre los dos números racionales está definida como:

- si los denominadores son iguales $(b=d)$,
  $$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \quad \text{y}, \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$
- si los denominadores son diferentes $(b\neq d)$,
  $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \text{y}$$
  $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}; \qquad b\neq d,\ b,\ d\neq 0.$$

✍ EJEMPLO 18

Resuelve las siguientes sumas de fracciones:

a) $\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$ b) $\frac{25}{392}+\frac{49}{50}$ c) $\frac{25}{392}-\frac{49}{50}$

SOLUCIONES:

a)

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{5+7}{8}=\frac{12}{8}=\frac{4(3)}{4(2)}=\frac{3}{2}.$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{25}{392}+\frac{49}{50}&=\frac{25(50)+392(49)}{19{,}600}\\&=\frac{1{,}250+19{,}208}{19{,}600}\\&=\frac{20{,}458}{19{,}600}\\&=\frac{10{,}229}{9{,}800}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{25}{392}-\frac{49}{50}&=\frac{25(50)-392(49)}{19{,}600}\\&=\frac{1250-19{,}208}{19{,}600}\\&=\frac{-17{,}958}{19{,}600}\\&=\frac{2(-8979)}{2(9800)}\\&=\frac{-8979}{9800}.\end{aligned}$$

✍ EJEMPLO 19

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{6}-\frac{8}{21}$ b) $\frac{-3}{7}-\left(\frac{-2}{9}\right)+\frac{2}{5}$

SOLUCIONES:

a)

$$\frac{5}{6}-\frac{8}{21}=\frac{105-48}{126}=\frac{57}{126}=\frac{3(19)}{3(42)}=\frac{19}{42}.$$

b)

$$\frac{-3}{7}-\left(\frac{-2}{9}\right)+\frac{2}{5}=\frac{-3}{7}+\frac{2}{9}+\frac{2}{5}=\frac{-135+70+126}{315}=\frac{61}{315}.$$

■ 2.2.3.4 NÚMEROS MIXTOS

En algunas ocasiones, es usual que se presenten operaciones con una clase de números llamados *mixtos*. Para conocerlos, definiremos primero los siguientes tipos de fracciones.

Fracción propia es aquella en la que el numerador es menor que el denominador.
Así, cualquier fracción propia es menor que la unidad.

Ejemplos: $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{3}{10}$.

Fracción impropia es aquella cuyo numerador es mayor que su denominador.

Ejemplos: $\frac{5}{2}, \frac{8}{7}, \frac{9}{4}, \frac{19}{10}$.

Número mixto es un número formado por un número entero positivo,
seguido de una fracción propia.

Ejemplos: $1\frac{3}{5}, 3\frac{4}{7}, 11\frac{1}{5}, 2\frac{8}{9}$.

El significado de un número mixto es, en realidad, el resultado de sumar el número entero y la fracción. Por ejemplo:

$$1\frac{3}{5}=1+\frac{3}{5} \quad , \quad 3\frac{4}{7}=3+\frac{4}{7} \quad , \quad 11\frac{1}{5}=11+\frac{1}{5} \quad , \quad 2\frac{8}{9}=2+\frac{8}{9}.$$

Así que $\quad 1\frac{3}{5}=\frac{8}{5} \quad , \quad 3\frac{4}{7}=\frac{25}{7} \quad , \quad 11\frac{1}{5}=\frac{56}{5} \quad , \quad 2\frac{8}{9}=\frac{26}{9}$.

Observemos que cada una de las fracciones mixtas anteriores equivale a una fracción impropia.

Una manera más fácil de convertir una fracción mixta a fracción impropia es como sigue:

$$1\frac{3}{5}=\frac{1(5)+3}{5}=\frac{5+3}{5}=\frac{8}{5}.$$

Multiplicamos el entero 1 por 5 (el denominador de la fracción), y al resultado sumar con 3. Éste será el numerador de la fracción impropia. El denominador de la fracción impropia será el mismo que el de la fracción mixta.

Esto se resume como sigue:

Si k es un número entero y $\frac{a}{b}$ una fracción, entonces $k\frac{a}{b}=\frac{kb+a}{b}$.

Con los números mixtos también podemos efectuar operaciones.

✍ EJEMPLO 20

Calcula las siguientes operaciones y reduce el resultado a su mínima expresión.

a) $6\frac{1}{5}+2\frac{7}{15}$ b) $6\frac{1}{5}-2\frac{7}{15}$ c) $\dfrac{6\frac{1}{5}+2\frac{1}{5}}{6\frac{1}{5}-2\frac{7}{15}}$

SOLUCIÓN

a)
$$6\frac{1}{5}+2\frac{7}{15} = \frac{(6)(5)+1}{5}+\frac{(2)(15)+7}{15}$$
$$= \frac{30+1}{5}+\frac{30+7}{15}$$
$$= \frac{31}{5}+\frac{37}{15} = \frac{93+37}{15}$$
$$= \frac{130}{15} = \frac{5(26)}{5(3)} = \frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

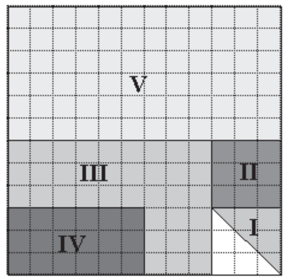
b)
$$6\frac{1}{5}-2\frac{7}{15} = \frac{(6)(5)+1}{5}-\frac{(2)(15)+7}{15}$$
$$= \frac{30+1}{5}-\frac{30+7}{15}$$
$$= \frac{31}{5}-\frac{37}{15} = \frac{93-37}{15} = \frac{56}{15}=3\frac{11}{15}.$$

c) Haciendo uso de los resultados a) y b):
$$\frac{6\frac{1}{5}+2\frac{1}{5}}{6\frac{1}{5}-2\frac{7}{15}} = \frac{\frac{31}{5}+\frac{11}{5}}{\frac{31}{5}-\frac{37}{15}} = \frac{\frac{42}{5}}{\frac{93-37}{15}} = \frac{\frac{42}{5}}{\frac{56}{15}}$$
$$= \frac{15(42)}{5(56)} = \frac{126}{56} = \frac{63}{28}.$$

■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

Trabaja en equipo los siguientes problemas y comparte los resultados con tus compañeros. En caso de existir dudas, apóyate en el profesor.

3. Observa la figura y responde:



a) ¿Qué fracción del cuadrado global son las regiones I, II, III, IV y V?

b) Calcula la fracción que representa la suma de las áreas en los casos siguientes:

- I + II
- I + III + IV
- II + III + V
- ¿Qué fracción representa la región no numerada?

4. ¿Qué cantidad hay que sumarle a $\frac{1}{3}$ para obtener $\frac{1}{2}$?

5. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{12}+\frac{21}{12}-\frac{15}{12}=$ b) $\frac{1}{3}-3+\frac{2}{3}=$

c) $\frac{10}{3}-\frac{4}{6}=$ d) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=$

e) $72\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{5}\right)=$ f) $\dfrac{3-4}{\frac{3}{4}}+\frac{1}{7}-2=$

g) $\left(\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}=$ h) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$

i) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+1\right)=$

j) $5+\frac{1}{1+\frac{2}{2+3}}=$

k) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}+1\right)\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)=$

l) $3-4\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+3\left(\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}\right)\right]=$

6. Completa los números que faltan en el siguiente cuadro mágico, sabiendo que la suma de los números de cada fila, columna o diagonal es 30.

	17/3		9
19/3		8	22/3
23/3	7	20/3	
6			

7. Se ha dividido un terreno en tres lotes. El primero mide $\frac{3}{8}$ de la superficie total, el segundo $\frac{2}{5}$ de la superficie total.

- ¿Cuál lote es el mayor de los tres?

8. En una ocasión, una persona compró un artículo en \$700.00, lo vendió en \$800.00, lo volvió a comprar en \$900.00 y finalmente lo vendió a \$1000.00.

- ¿Cuánta ganancia obtuvo?

9. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $1\frac{7}{4}-2\frac{4}{7}=$

b) $\left(2\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=$

c) $15\frac{5}{9}-10+5\frac{1}{3}=$

d) $3+\frac{2}{7}-\frac{1}{3}=$

e) $\frac{3+\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}}=$

f) $\frac{-2}{7}+1\frac{1}{3}=$

g) $3\frac{1}{4}+2\frac{7}{8}-2\frac{1}{3}=$

h) $\left(\frac{5}{8}\right)\left(3\frac{1}{3}\right)=$

i) $3+\frac{1}{3+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=$

j) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}+1\right)\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)=$

10. Si una persona ha vivido $\frac{1}{4}$ de siglo más 14 $\frac{2}{3}$ de años, ¿qué edad tiene?

11. Una persona camina $1\frac{2}{5}$ km por hora durante $2\frac{6}{7}$ hrs. ¿Qué distancia recorrió durante ese tiempo?

12. La diagonal de un cuadrado es aproximadamente $1\frac{2}{5}$ veces la longitud del lado. Encuentra la longitud de la diagonal de un cuadrado de 24 cm de lado.

13. Si se corta un pedazo de alambre de $3\frac{3}{4}$ metros de largo de un rollo que tiene 100 metros de alambre, ¿cuánto alambre queda en el rollo?

14. ¿Por cuál número hay que dividir a $5\frac{2}{6}$ para obtener $6\frac{1}{3}$?

15. Una receta utiliza $\frac{3}{4}$ de cucharadita de ablandador par sazonar cada kilogramo de carne. Para cocinar $4\frac{1}{2}$ kilogramos de carne, ¿cuántas cucharaditas de ablandador se necesitan?

16. Una tabla mide $22\frac{1}{2}$ pies de longitud. ¿Cuál es la longitud de cada pieza al cortarla en cinco pedazos de igual longitud? (Ignora el grosor de los cortes).

17. En un platillo de una balanza se ha puesto una barra completa de jabón, en el otro, $\frac{3}{4}$ partes de un jabón igual y una pesa de $\frac{3}{4}$ de kg. La balanza está en equilibrio. ¿Cuánto pesa el trozo entero de jabón?

Observación: En el sentido coloquial utilizamos el término *peso*. En términos formales de la física la pregunta se formula así: ¿Cuál es la *masa* de la barra completa de jabón?

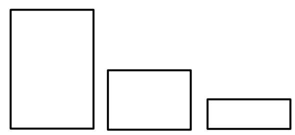
2.2.4 PROBLEMAS CON RACIONALES

Tratemos ahora de abordar problemas en los que están involucradas las fracciones. Podrás darte cuenta de cómo nuestra vida cotidiana está permeada por este tipo de números.

Reúnete en equipo para tratar de resolver las siguientes actividades. Anota las estrategias y planteamientos que utilizas en tu cuaderno.

ACTIVIDAD 38

Imagina que tienes los siguientes envases que miden cierta cantidad de azúcar cada uno de ellos:



1 kilo 1/2 kilo 1/4 kilo

Deseamos reunir un kilogramo de azúcar con los envases. ¿De cuántas maneras diferentes puedes reunir 1 kg. de azúcar? Como puedes observar, de lo que se trata aquí es de sumar fracciones con 1kg , $\frac{1}{2}\text{kg}$ y $\frac{1}{4}\text{kg}$.

Responde entonces:

a) ¿De cuántas maneras diferentes puedes reunir 1 y medio kilogramo de azúcar?
b) ¿De cuántas maneras diferentes puedes reunir 1 ¾ kilogramo de azúcar?
c) Utilizando los medios y los cuartos, ¿puedes hacer 5 kilos?

- ¿Cómo?

d) Si quieres 2 ½ kilos de azúcar utilizando sólo los cuartos, ¿podrías hacerlo?

- ¿Cómo?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

ACTIVIDAD 39

Cada vez que cae al suelo, una pelota rebota las $\frac{3}{5}$ partes de la altura desde la que ha caído. Si se le deja caer de una altura de 125 metros.

- ¿A qué altura llegará después del primer rebote?
- ¿A qué altura llegará después del segundo rebote?
- ¿A qué altura llegará la pelota después del tercer rebote?
- Puedes hacer uso de dibujos para ayudarte a responder las preguntas.

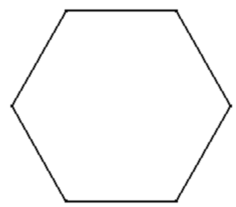
🛠 ACTIVIDAD 40

Una botella tiene $\frac{3}{4}$ de litro de jugo de naranja, otra tiene $\frac{3}{5}$ de litro y una tercera tiene $\frac{5}{6}$.

- ¿Qué cantidad de jugo de naranja tienen entre las tres botellas?
- ¿Cuánto jugo de naranja tiene la primera botella más que la segunda?

🛠 ACTIVIDAD 41

Si el hexágono siguiente representa un entero,



- ¿Qué fracción representa cada una de las siguientes formas?

- ¿Qué fracción del hexágono representa $A + B$?
- ¿Qué fracción del hexágono representa $2A - B$?

✍ EJEMPLO 21

Debido al mal tiempo, un ciclista viajó el día de ayer solamente $\frac{1}{6}$ de su recorrido. Decidió viajar $\frac{3}{8}$ el día de hoy, y $\frac{2}{7}$ el día de mañana. ¿Cuánto le faltará para llegar al final de su recorrido pasado mañana?

SOLUCIÓN

Denotaremos al recorrido completo que debe efectuar el ciclista como la **unidad**. Si ayer viajó $\frac{1}{6}$ del recorrido, hoy $\frac{3}{8}$ y mañana quiere recorrer $\frac{2}{7}$ de él, entonces habrá recorrido en total hasta el día de mañana $\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{139}{168}$ del recorrido. Le falta por recorrer : $1 - \frac{139}{168} = \frac{29}{168}$ del recorrido.

✍ EJEMPLO 22

Un recipiente contiene agua hasta los $\frac{4}{5}$ de su capacidad. Si se saca la mitad del agua que contiene,

a) ¿Qué fracción de la capacidad del recipiente se ha sacado?
b) Si la capacidad del recipiente es de 80 litros, ¿cuántos litros quedan en el mismo?

SOLUCIÓN

a) Si el recipiente contiene agua a los $\frac{4}{5}$ de su capacidad, al sacar la mitad del agua nos queda $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5}$ de ella y por lo tanto $\frac{2}{5}$ de la capacidad del recipiente.

b) Si la capacidad del recipiente es de 80 litros, como únicamente contiene $\frac{4}{5}$ de su capacidad, en el recipiente hay $\left(\frac{4}{5}\right)80 = \frac{320}{5} = 64$ litros.

Ahora, si se extrae la mitad de estos litros nos quedarían únicamente 32 litros en el recipiente.

✍ EJEMPLO 23

Se compró un costal lleno de alpiste para alimentar a un canario. El primer día, el canario se comió $\frac{1}{2}$ del total de alpiste. El segundo día se comió $\frac{1}{3}$ del alpiste restante y el tercer día comió $\frac{1}{4}$ del sobrante.

Del total de alpiste que había en el costal, ¿qué fracción queda?

SOLUCIÓN

Representemos al costal lleno de alpiste con la unidad.

- El primer día, se comió medio costal de alpiste, lo representamos así: $1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ costal de alpiste se comió y le queda $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ costal de alpiste.
- El segundo día se come $\frac{1}{3}$ del alpiste restante: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ se come del costal de alpiste, y le queda: $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6-2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{4(1)}{4(3)} = \frac{1}{3}$ de costal de alpiste.
- El tercer día, de lo que le queda, que es $\frac{1}{3}$ del costal de alpiste, se come $\frac{1}{4}$, que representamos así: $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$.
- Así, después del tercer día le queda $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{12-3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{9(1)}{9(4)} = \frac{1}{4}$ del costal de alpiste.

۞ ***Este problema también se puede resolver de manera gráfica, intenta resolverlo de esa manera.***

18. En una clase hay 30 estudiantes, de los cuales las $\frac{3}{5}$ partes son alumnas.

- ¿Cuántas alumnas hay en esta clase?
- ¿Y cuántos alumnos?
- Justifica tu respuesta.

19. ¿Qué variación experimenta una fracción si se multiplica por 5 el numerador y se divide entre 5 el denominador?

- Justifica tu respuesta.

20. Pablo, un fabricante de cortinas, desea hacer tres pares idénticos de cortinas. Si cada par necesita $6\frac{3}{4}$ metros de material, ¿cuánto material necesita en total?

21. A una persona que le preguntan cuánto pesa, responde: " La mitad de la cuarta parte de mi peso es igual a 10 kilogramos. ¿Cuánto pesa esa persona? [12]

22. Una receta de cocina necesita primero $2\frac{1}{2}$ tazas de harina, y luego se debe agregar $1\frac{1}{3}$ tazas de harina más. ¿Cuánta harina necesita la receta?

23. Las instrucciones para preparar un pavo indican que si éste pesa de 12 a 16 kilogramos, debe hornearse a 160° durante 22 minutos por kilogramo. Diana desea hornear un pavo de $13\frac{1}{2}$ kilogramos. ¿Cuánto tiempo debe estar el pavo dentro del horno?

24. Una enfermera debe suministrar $\frac{1}{6}$ de medicamento por cada kilogramo de masa del paciente. Si una persona pesa (o tiene un masa de) 80 kilogramos, determina la cantidad de medicamento que debe suministrársele.

25. En un puesto de revistas se han vendido a lo largo de la mañana los $\frac{2}{3}$ de un lote de periódicos. Por la tarde se ha vendido la mitad de los que habían quedado en la mañana. ¿Qué fracción del total de periódicos representan los vendidos por la tarde?

- Si no se han vendido 20 periódicos, ¿cuántos había al empezar la venta?

26. Un comerciante tiene tres tipos de café: mexicano, cubano y colombiano. El peso total es de 885 kilogramos. Si el peso del café mexicano es los $\frac{2}{5}$ del total y el del colombiano los $\frac{2}{3}$ de lo que queda, ¿cuántos kilogramos de café hay de cada clase?

[12] En términos formales de la física, los kilogramos no miden el *peso*; sino la masa, en este caso, *corporal.*

27. Una botella tiene una capacidad de $\frac{3}{4}$ de litro y otra de $\frac{7}{10}$ de litro. Explica:

- ¿Cuál de las dos botellas tiene mayor capacidad?
- Si las dos botellas están llenas de agua, ¿qué tanta agua hay en las dos botellas juntas?
- Si de la primera botella tomo la mitad del agua y de la segunda tomo dos terceras partes de su contenido, ¿cuánta agua me queda en cada botella?
- ¿Cuánta agua queda en las dos botellas juntas?
- Finalmente, ¿cuánta agua consumí?

28. Un cartero dejó en una oficina un sexto del total de las cartas que llevaba; en un banco deja dos novenos del resto y todavía tiene 70 cartas por repartir. ¿Cuántas cartas le dieron en la oficina de correos para que repartiera?

29. Una persona pesa 63 newtons en la Tierra. Si en Urano su peso es $\frac{111}{125}$ del peso que tiene en la Tierra, ¿cuánto pesa en Urano?

2.3 DECIMALES

Tenemos ahora pleno conocimiento de cómo se definen, operan y se aplican los números racionales, también conocidos como fracciones. Sin embargo, los números racionales también se caracterizan por tener un desarrollo *decimal.*

2.3.1 TRANSFORMACIÓN DE FRACCIONES A DECIMALES

Sabemos que un número racional puede ser escrito de la forma $\frac{m}{n}$ con m, n números enteros y $n \neq 0$. Al efectuar la división de m entre n, llegamos a la **forma decimal del número racional**.

Por ejemplo, para escribir la forma decimal de $\frac{7}{4}$ efectuamos la división:

$$4 \overline{\big)\ 7}$$

cuyo resultado es 1.75. Puedes verificar que el residuo de esta división es cero.

De igual manera $\frac{2}{11}$ equivale a efectuar la división:

$$11 \overline{\big)\ 2}$$

- Y da como resultado 0.18181818...

Observa que el residuo de esta división nunca va a ser cero, y que el número 18 se repetirá indefinidamente después del punto decimal.

También $\frac{5}{6}$ se puede escribir como 0.83333... al efectuar la división de 5 entre 6.

Con los ejemplos anteriores, nos damos cuenta de que la parte decimal de un número racional es finita, o bien, hay decimales que se repiten (indefinidamente). En términos formales, el desarrollo decimal de un número racional puede ser de tres tipos:

1. Decimales **exactos o finitos**: son aquellos cuya parte decimal tiene un número finito de cifras.

Por ejemplo, $\frac{1}{5}=0.2$, $\frac{3}{10}=0.3$ y $\frac{82}{25}=3.28$.

2. Decimales **periódicos puros**: en esta expresión, toda la parte decimal se repite indefinidamente en bloques o periodos de números.

Por ejemplo, $\frac{2}{3} = 0.6666...$ en este caso, el 6 se repite indefinidamente. Se dice entonces que 6 es el periodo y el número decimal se puede escribir así: $0.6666... = 0.\overline{6}$. De igual manera $\frac{3}{11} = 0.2727... = 0.\overline{27}$ y $\frac{2}{7} = 0.285714285714... = 0.\overline{285714}$.

Nota: La barra indica el grupo de cifras que se repiten infinitamente en ese orden. El periodo de un decimal periódico es el grupo de cifras que se repiten indefinidamente. Así $\frac{2}{3}$ = 0.6666... tiene periodo 6, $\frac{3}{11} = 0.272727...$ tiene periodo 27, etc.

3. Decimales **periódicos mixtos**: en la forma decimal encontramos una parte que no se repite y otra que se repite infinitas veces.

Por ejemplo $\frac{1}{60} = 0.0166...,$ en la parte decimal el 01 no se repite y el 6 se repite infinitamente, de manera que $0.01666... = 0.01\overline{6}$. También $\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\overline{3}$ y por último $\frac{1031}{330} = 3.12424... = 3.1\overline{24}$.

Nota: Al conjunto de cifras que no se repiten no se les pone barra.

Podemos concluir que la representación decimal del número racional $\frac{m}{n}$ con m, n enteros y $n \neq 0$, es decimal finita o decimal periódica.

2.3.2 TRANSFORMACIÓN DE DECIMALES A FRACCIONES

Hasta aquí se ha visto que todo número racional puede expresarse como un número decimal finito o decimal periódico. ¿El proceso a la inversa será cierto? La respuesta es sí. El procedimiento es diferente para cada uno de los tipos de números decimales.

CASO 1: DECIMAL FINITO

Consideremos el número decimal finito 3.125 y tratemos de escribirlo en forma de fracción. La idea es multiplicar y dividir el número decimal ya sea por 10,100,1000[13], etc., (dependiendo de cuántos números se encuentran a la derecha del punto decimal). En este caso, hay tres dígitos después del punto decimal, así que multiplicamos y dividimos entre 1000:

$$3.125=\frac{3.125(1000)}{1000}=\frac{3125}{1000}$$

Por lo tanto, $3.125=\frac{3125}{1000}$.

CASO 2: DECIMAL PERIÓDICO PURO

En este caso, cambiaremos un decimal periódico puro a fracción.

✍ EJEMPLO 24

Consideremos el decimal $0.\overline{7} = 0.777...$. Llamaremos a al decima $0.777...,$ esto es, $a = 0.777...$ Como la cantidad de dígitos que forman el periodo es uno (en este caso el periodo es 7), entonces multiplicamos por 10 a ambos lados de la igualdad:

$$a = 0.777... \qquad (1)$$

$$10a = 7.777... \qquad (2)$$

Ahora, restemos (1) de (2):

$$\begin{array}{rr} & 10a=7.7777...\\ - & a=0.7777...\\ \hline & 9a=7. \end{array}$$

Por último, resolvamos la ecuación $9a = 7$. Despejando a:

$$a = \frac{7}{9}.$$

Puedes comprobar el resultado, efectuando la división de 7 entre 9.

[13] Esto es, por potencias de 10: $10^1, 10^2, 10^3,$ etc.

✍ EJEMPLO 25

Consideremos ahora, el decimal $3.\overline{41} = 3.414141\ldots$ Llamaremos a al decimal $3.414141\ldots,$ esto es, $a = 3.414141\ldots$ Como la cantidad de dígitos que forman el periodo es dos (en este caso el periodo es 41), entonces multiplicamos por 100 a ambos lados de la igualdad:

$$a = 3.414141\ldots \qquad (1)$$

$$100a = 341.4141\ldots \qquad (2)$$

Ahora, efectuemos la resta (1) de (2):

$$\begin{array}{rl} 100a = & 341.4141\ldots \\ - \quad a = & 3.414141\ldots \\ \hline 99a = 338. & \end{array}$$

Por último, resolvamos la ecuación $99a = 338.$ Despejando a:

$$a = \frac{338}{99}.$$

Puedes comprobar el resultado, efectuando la división de 338 entre 99.

CASO 3: DECIMAL PERIÓDICO MIXTO

Analicemos el caso para convertir un decimal periódico mixto a fracción.

✍ EJEMPLO 26

Tomemos como ejemplo el número decimal $0.51\overline{32}.$ Llamemos a al número $0.51323232\ldots,$ esto es:

$$a = 0.51323232\ldots \qquad (1)$$

Multiplicaremos $a,$ ya sea por 10, 100, 1000, etc. (lo que necesitemos) para que el nuevo número sea un decimal periódico puro. En este caso, ambos lados de la igualdad (1) se deben multiplicar por 100 y al efectuar la multiplicación lo que resulte sea un decimal periódico puro:

$$100a = 51.\overline{32} = 51.323232\ldots \qquad (2)$$

Observa que el nuevo número $100a$ ya es periódico puro. Regresemos entonces al procedimiento del CASO 2. Como la cantidad de dígitos que forman el periodo es dos (en este caso el periodo es 32), multipliquemos ambos lados de la ecuación (2) por 100:

$$100\ (100a) = 100\ (51.\overline{32}) = 100\,(51.323232\ldots) \qquad (3)$$

$$10000a = 5132.3232\ldots \qquad (4)$$

Restemos la ecuación (2) de la ecuación (4):

$$\begin{array}{rl} & 10000a = 5132.3232... \\ - & 100a = 51.3232... \\ \hline & 9900A = 5081. \end{array}$$

Despejando a de la resta anterior, llegamos a que

$$a = \frac{5081}{9900}.$$

✍ EJEMPLO 27

Consideremos al decimal periódico mixto $4.7\overline{053}$.

Llamemos a al número $4.7\overline{053} = 4.7053053...,$ esto es,

$$a = 4.7053053... \qquad (1)$$

En este caso, ambos lados de la igualdad (1) se deben multiplicar por 10, y al efectuar la multiplicación lo que resulte será un decimal periódico puro:

$$10a = 47.\overline{053} = 47.053053... \qquad (2)$$

Observa que el nuevo número $10a$ ya es periódico puro. Regresemos entonces al procedimiento del CASO 2. Como la cantidad de dígitos que forman el periodo es tres (en este caso el periodo es 053), multipliquemos ambos lados de la ecuación (2) por 1000:

$$1000\ (10a) = 1000\ \left(47.\overline{053}\right) = 1000\ \ 47.053053... \qquad (3)$$

$$10000a = 47053.053053... \qquad (4)$$

Restemos la ecuación (2) de la ecuación (4):

$$\begin{array}{rl} & 10000a = 47053.053053... \\ - & 10a = 47.053053... \\ \hline & 9990A = 47006. \end{array}$$

Despejando a de la resta anterior, llegamos a que

$$a = \frac{47006}{9990} = \frac{23503}{4995}.$$

30. Escribe las siguientes fracciones en forma decimal:

$$\frac{9}{15}, \quad \frac{40}{12}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{21}{100}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{33}{6}, \quad \frac{28}{12} \text{ y } \frac{14}{3}.$$

31. Escribe en forma de fracciones los siguientes números decimales:

$$0.42, \quad 0.\overline{81}, \quad 0.9\overline{3}, \quad 0.26, \quad 10.\overline{246}, \quad 3.\overline{16}, \quad 0.03,$$

$$3.2\overline{3}, \quad 2.\overline{2}, \quad 0.52\overline{67}, \quad 0.4, \quad 0.\overline{4} \text{ y } 0.4\overline{4}.$$

2.3.3 OPERACIONES COMBINANDO DECIMALES Y FRACCIONES

Como tenemos diferentes representaciones de números, es conveniente y quizá necesario combinar números que estén escritos en formas diferentes. Si se suman números escritos como decimales y otros como fracciones, entonces se requerirá cambiar todos los números a la misma forma —decimal o fracción— y efectuar la operación indicada.

✍ EJEMPLO 28

Suma 0.75 y $1\frac{1}{2}$.

Cambiando $1\frac{1}{2}$ a decimal: $0.75+1\frac{1}{2}=075+1.5=2.25$.

Cambiando 0.75 a fracción: $0.75+1\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}=2.25$.

✍ EJEMPLO 29

Suma $\frac{3}{4}$ y 1.32.

Cambiando $\frac{3}{4}$ a decimal: $\frac{3}{4}+1.32=0.75+1.32=2.07$.

Cambiando 1.32 a fracción: $\frac{3}{4}+\frac{132}{100}=\frac{75+132}{100}=\frac{207}{100}=2.07$.

✍ EJEMPLO 30

Suma 2.45 y $1\frac{1}{3}$.

Cambiando $1\frac{1}{3}$ a decimal: $2.45+1\frac{1}{3}=2.45+1.\overline{3}=3.78\overline{3}$.

Cambiando 2.45 a fracción: $\frac{245}{100}+\frac{4}{3}=\frac{735+400}{300}=\frac{1{,}135}{300}=3.78\overline{3}$.

✍ EJEMPLO 31

Resta de 0.07 y $\frac{5}{2}$.

Cambiando $\frac{5}{2}$ a decimal: $\frac{5}{2}-0.07=2.5-0.07=2.43$.

Cambiando 0.07 a fracción: $\frac{5}{2}-\frac{7}{100}=\frac{250-7}{100}=\frac{243}{100}=2.43$.

■ **SECCIÓN DE EJERCICIOS**

32. Efectúa las operaciones como en los ejemplos **30** y **31**:

1) $4-0.75+1\frac{1}{2}$ 2) $-2.5+4\frac{1}{3}+2.\overline{5}-1\frac{2}{5}$

3) $-5+\frac{3}{4}-1.32$ 4) $7\frac{1}{3}-7$

5) $2.2+2.\overline{2}+2.2\overline{2}$ 6) $15.5-15+0.\overline{5}$

7) $-3-0-007-\frac{5}{2}+\frac{1}{3}$ 8) $\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+1.\overline{3}$

9) $\frac{1}{3}-0.3$ 10) $6\frac{1}{2}-6.\overline{5}+3$

2.4 NÚMEROS IRRACIONALES Y CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

■ NÚMEROS IRRACIONALES

Hemos comentado en páginas anteriores que la representación decimal de un número racional $\frac{m}{n}$ con *m, n* números enteros y $n \neq 0$ es un **decimal finito** o un **decimal periódico**. Resulta que la proposición inversa también es verdadera:

Todo número *decimal finito* o *decimal periódico* es un **número racional**;
es decir, se puede representar como una **fracción**.

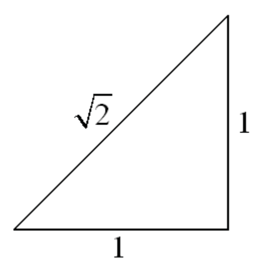
Pero, ¿existirán números cuya parte decimal no tenga periodo? La respuesta es sí:

Ejemplos: .1234567891011 ... , 3.141592653589 ...

¡Por más que intentes representar estos números decimales como fracciones resultará imposible hacerlo! Los ejemplos anteriores se conocen como *números irracionales*[14].

A los números que no son ni enteros ni fracciones se les llama **alogos o irracionales**.

Los números irracionales aparecen en la historia de las matemáticas vinculados a la geometría, cuando consideraban por ejemplo, un triángulo rectángulo de catetos 1.



- Resulta que la medida de la hipotenusa de este triángulo es justamente un número irracional conocido como $\sqrt{2}$. La característica principal de los números irracionales es que su expresión decimal no tiene periodo. De hecho, todas las **raíces cuadradas** que no son exactas, son ejemplos de números irracionales:

$$\sqrt{2}=1.414213562\ldots \qquad \sqrt{3}=1.732050808\ldots$$

$$\sqrt{5}=2.23606797\ldots \qquad \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ldots$$

[14] Supuestamente, las magnitudes inconmensurables fueron descubiertas por la Escuela Pitagórica, en el siglo VI a.c., mientras se intentaban resolver problemas como la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. La matemática pitagórica se basaba en los enteros positivos y en todo lo que es expresable en términos de operaciones entre ellos; por lo tanto, a lo sumo se llegó a considerar fracciones positivas y se encontró que estas cantidades no eran ni números enteros ni fracciones. Esto se debió a que se concebían las figuras como constituidas por una cantidad finita de puntos. El descubrimiento de magnitudes inconmensurables puso en evidencia que tal suposición era falsa, y que muchas demostraciones de la geometría eran también falsas o estaban incompletas. Eudoxo (408–355 a.c.), estudiante de la Academia de Platón, definió la igualdad de proporciones aplicable para los casos racional e irracional, y permitió el avance de la geometría después de su estancamiento temporal. Si el tema te interesa, pide información a tu profesor.

- Otro número irracional famoso es el número $\boldsymbol{\pi}$ [15] que representa la longitud de una circunferencia de diámetro 1, o bien, la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

- Asimismo, existe un número irracional que es: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.61803398\ldots$, conocido como **número de oro** o **razón áurea.** [16]

En la Unidad III: geometría, encontrarás mayor información sobre estos números, así como algunas de sus aplicaciones directas a la vida cotidiana.

■ CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Para comprender mejor la interrelación que existe entre los conjuntos de números, haremos un recuento de los que hemos usado hasta ahora:

- Iniciamos trabajando con el conjunto de los ***números naturales***, 1, 2, 3, 4, 5..., y los denotamos con la letra $\mathbb{N}$.

- Los números naturales forman parte de otro grupo más grande que consta de los números enteros negativos, el número cero y los números enteros positivos. A este conjunto se les llama el conjunto de los ***números enteros*** que son: ... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ... y los denotamos con la letra $\mathbb{Z}$. De esta manera, los números naturales también son enteros.

- Después, definimos el conjuntos de los ***números racionales***, mejor conocidos como fracciones. Los definimos como los que se pueden expresar como $\frac{a}{b}$, donde *a* y *b* son números enteros, $b\neq 0$, y los denotamos con la letra $\mathbb{Q}$. Recordemos que cada número entero puede escribirse como un número racional, ya que únicamente le colocamos a cada uno de ellos, el denominador 1 . Ya dijimos que los número naturales son números enteros y, a su vez, los números enteros son números racionales. De esta manera, tanto los números naturales como los números enteros, son números racionales.

- Y por último, hablamos de los ***números irracionales***: aquéllos que no son ni enteros ni fracciones; o bien, aquéllos cuya parte decimal no tiene periodo. Los denotamos con la letra **I** .

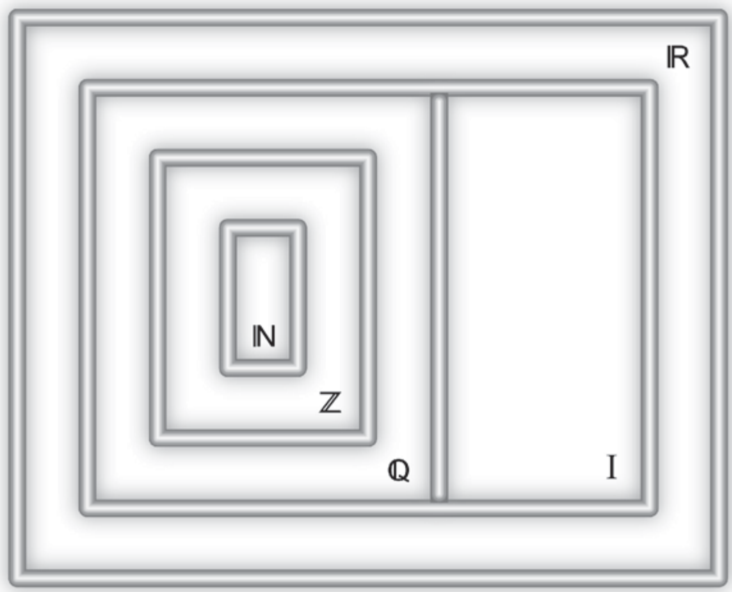
[15] Los antiguos egipcios (hacia 1600 a.c.) ya sabían —seguramente de forma intuitiva— que existía una relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro; y entre el área del círculo y el radio al cuadrado. En el *Papiro de Rhind* puede leerse lo siguiente: "Corta 1/9 del diámetro y construye un cuadrado sobre la longitud restante. Este cuadrado tiene la misma área que el círculo". En Mesopotamia, más o menos por la misma época, los babilonios utilizaban el valor 3+1/8, según queda registrado en la *Tablilla de Susa*.

[16] Seguramente, si hiciéramos una encuesta a 100 personas preguntándoles acerca de su número preferido, ninguna contestaría que es el 1.61803… Pero según parece, éste es y ha sido el número preferido de la humanidad durante miles de años. No hay más que tomar una tarjeta de crédito, un folio o un libro, y dividir su alto entre su ancho para toparse con el 1.61803. Hablando matemáticamente, el número *Phi (Φ)* —que así se llama— es el resultado de dividir una diagonal cualquiera entre un lado cualquiera de un pentágono regular. Pero también lo podemos calcular mediante las pinturas más admiradas (Leonardo Da Vinci, Dalí), y a través de la arquitectura más apreciada (Pirámides de Keops, Notre Dame, Partenón). Estas obras guardan la *proporción áurea* en cada una de sus partes.

- El conjunto formado por los ***números racionales e irracionales***, se llama conjunto de los ***números reales*** y se denota con la letra $\mathbb{R}$.

Ahora te presentamos gráficamente la relación que tiene cada conjunto de números con el resto, conformando así la totalidad de los números que conocemos y utilizamos:

DIAGRAMA DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES



$\mathbb{R}$ = reales I = irracionales $\mathbb{Q}$ = racionales $\mathbb{Z}$ = enteros $\mathbb{N}$ = naturales

2.5 RAZONES Y PROPORCIONES

2.5.1 RAZONES

Uno de los conceptos matemáticos más utilizados es el de la *razón*. Por ejemplo: la inclinación de un tejado, las ampliaciones o reducciones de fotografías y el promedio de días lunes que hay en dos semanas pueden expresarse como una razón.

Anteriormente tratamos con los números racionales: los que se pueden expresar como un cociente $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ donde p, q son números enteros. La razón se escribe como una fracción (en general positiva) a la cual se le puede dar otro tipo de interpretación; que más adelante veremos.

Para tratar de entender este concepto, iniciaremos con algunas actividades. Se te sugiere realizarlas en equipo y discutir con otros equipos los resultados obtenidos, así como recurrir al profesor en cualquier momento que lo requieras.

ACTIVIDAD 42

Imagina que después de haber comprado en la papelería una bolsa de globos para una fiesta, llegas a tu casa y te encuentras que de los 100 globos de la bolsa, 50 son rojos, 25 azules, 10 amarillos, 5 verdes y 10 negros. Expresa en forma de fracciones:

- ¿Cuál es la razón de los globos rojos respecto al total de globos?
- ¿Cuál es la razón de los globos amarillos respecto a los globos rojos?
- ¿Cuál será la razón de los globos verdes y negros, respecto al total de globos?
- ¿Tiene sentido esta última pregunta?
- Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD 43

Supongamos que te aplican una encuesta de 20 preguntas para conocer tu opinión respecto de un producto que salió al mercado, y que de las 20 preguntas, no respondiste 5, y de las que contestaste, 3 fueron respuestas falsas.

- ¿Cuál es la razón de las preguntas que contestaste con el total de las que tenía la encuesta?
- ¿Cuál es la razón de tus respuestas falsas respecto al total de las que respondiste?
- Si tienes la siguiente razón: $\frac{5}{20}$, ¿cómo la podrías interpretar en la encuesta?

EJEMPLO 32

Escribe una razón para cada una de los siguientes enunciados.

i) La razón de 7 horas a 2 horas.
ii) La razón de 7 horas a 2 días.

SOLUCIÓN

i) Esta razón puede escribirse como $\frac{7}{2}$.

ii) Para escribir esta razón, primero hay que convertir 2 días en horas:

Sabemos que 1 día tiene 24 horas; de esta manera, 2 días = 2 (24 horas) = 48 horas.

- De esta manera, la razón de 7 horas a 2 días es $\frac{7}{48}$.

✍ EJEMPLO 33

Una persona, al comprar una caja con 30 manzanas, observó que 6 salieron maltratadas. ¿Cuál será la razón de las manzanas maltratadas con respecto al total?

SOLUCIÓN

Al comparar las manzanas maltratadas con el total, lo representamos mediante la razón:

$\frac{6}{30}$; simplificando, tenemos que $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

- Esto lo podemos interpretar así: "de cada 5 manzanas, una está maltratada".

✍ EJEMPLO 34

Un servicio de limpieza de alfombras cobra $ 600 por limpiar 3 cuartos alfombrados de las mismas dimensiones. ¿Cuánto costaría limpiar un sólo cuarto alfombrado?

SOLUCIÓN

Primero queremos encontrar el costo por cuarto:

Esto lo obtendremos al encontrar la razón : $\frac{600}{3}=200$.

- De esta forma, cada cuarto con las mismas dimensiones tendrá un costo de $ 200.

Con los ejemplos anteriores, podemos dar una definición de razón:

Razón es el resultado de comparar dos cantidades:
es la **comparación por cociente** de dos números enteros positivos.
Este cociente se interpreta como el número de veces que uno de ellos es mayor que el otro.

Las razones se representan mediante fracciones de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}, \quad \text{donde} \quad b\neq 0.$$

También hay otra forma de representar la razón:

Si se tiene la razón $\frac{a}{b}$, su representación equivalente es $a:b$.

Las siguientes actividades se te recomienda hacerlas por equipo; si no tienes la oportunidad, discute tus resultados con algunos de los compañeros o con el profesor.

■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

33. Escribe la razón para cada una de los siguientes enunciados:

i) La razón de los días lunes en dos semanas.
ii) La razón de los números pares en los primeros 20 números naturales.

34. Determina la razón y escríbela en su mínima expresión.

i) 24 minutos a 2 horas.
ii) 8 días a 40 horas.
iii) 16 minutos a 1 hora.
iv) 30 cm a 2 metros.

35. Unos biólogos marinos hicieron en un lago la estimación del número de peces y calcularon que hay 6000. Algunos de éstos son carpas y otros lobinas. Los biólogos rastrearon el lago y pescaron 21 carpas y 24 lobinas.

i) ¿Cuál es la razón de carpas respecto a las lobinas pescadas?
ii) ¿Cuántos peces hay de cada tipo?

36. Un tinaco tiene capacidad para 350 litros. Si contiene $\frac{5}{8}$ de agua de su capacidad total, y cada uno de los seis miembros de una familia usa 40 litros para bañarse, ¿alcanzará el agua para que todos puedan bañarse?

37. En un examen de opción múltiple, uno de los alumnos contestó correctamente 35 de las 40 preguntas.

i) ¿Cuál es la razón de preguntas correctas, respecto al número total de preguntas?

ii) ¿Cuál es la razón del número de respuestas incorrectas respecto al número de respuestas correctas?

iii) ¿Cuál es la razón del número de respuestas incorrectas respecto al número total de preguntas?

iv) ¿De qué manera podrías obtener la respuesta anterior con la respuesta del inciso *i)* ?

38. Un estudiante contesta 12 preguntas correctas de 18 en un examen, y 14 de 20 en otro examen. ¿En qué examen obtuvo mejor calificación?

39. Largo y ancho de un rectángulo están en una razón de 7:4. Si su perímetro es de 100 cm, determine la longitud del largo y ancho del rectángulo.

2.5.2 PROPORCIONES

Un concepto ligado con las razones son las *proporciones*. Asimismo, las proporciones están relacionadas con las fracciones equivalentes. Por ejemplo, para resolver la siguiente proporción

$$\frac{7}{5}=\frac{63}{x},$$

implica encontrar el valor de la x, para el cual las fracciones son equivalentes; y esto se cumple si $x=45$. Para recordar fracciones equivalentes, puedes recurrir al apartado 2.2.2.

Las siguientes actividades te permitirán ir asociando estos dos conceptos.

🛠 ACTIVIDAD 44

En un mapa de la República Mexicana a escala, $1\frac{1}{2}\,cm$ representa 55*km*. Si dos ciudades están separadas por 55*cm* en el mapa, ¿cuál es la separación real de las dos ciudades?

🛠 ACTIVIDAD 45

Si el sonido recorre en el aire una distancia de 1840*m* en $5\frac{1}{2}\,seg$, ¿cuál será la distancia que recorrerá en 1min ?

- Si el sonido recorrió 2000*m*, ¿cuánto tiempo le llevó recorrer esa distancia?

🛠 ACTIVIDAD 46

Una propiedad valuada en $420000, debe pagar a la tesorería del gobierno del D.F. por impuestos anuales $5000. ¿Qué impuestos deberá cobrar la tesorería para una propiedad similar valuada en $500000 ?

✍ EJEMPLO 35

Un sastre compró 3.5 metros de tela y pagó por ella $ 245. Si necesita 8 metros de la misma tela, ¿cuánto debe pagar?

SOLUCIÓN

Utilizando razones, podemos calcular el precio del metro de tela con los datos que tenemos. La razón de los 3.5 metros con respecto a $245.00 es:

$$\frac{245}{3.5}.$$

Así mismo, esta razón debe ser igual a la razón para 8 metros; esto es:

$\frac{x}{8}$, donde *x* es el valor que debe pagar para 8 metros.

Así que:

$$\frac{x}{8} = \frac{245}{3.5}$$

$$x = \frac{245 \times 8}{3.5}$$

$$x = 560.$$

- De esta forma, los 8 metros de tela costarán \$560.

✍ EJEMPLO 36

Encuentra el valor de la incógnita *x*, en la siguiente proporción:

$$\frac{63}{x} = \frac{9}{5}$$

SOLUCIÓN

Al obtener los productos cruzados:

$$63(5) = 9x$$

$$315 = 9x$$

$$\frac{315}{9} = \frac{9x}{9}$$

$$35 = x.$$

✍ EJEMPLO 37

Si se requieren 16 huevos y 4 kg de harina para la elaboración de un pastel, ¿cuántos huevos se requerirán para 7 kg de harina?

SOLUCIÓN

Sea x = Número de huevos requeridos para 7 kg de harina. De esta manera, podemos calcular la razón de huevos por kg de harina como

$\frac{16}{4}$, asimismo, esta razón debe ser igual para 7 kg, esto es $\frac{x}{7}$

De esta manera obtenemos:

$$\frac{16}{4} = \frac{x}{7}$$

$$4=\frac{x}{7}$$

$$4(7)=7\frac{x}{7}$$

$$28=x\,.$$

- Así, para 7 kg de harina, se necesitan 28 huevos.

Con estos ejemplos, podremos dar una definición de proporción:

Proporción es la equivalencia entre dos *razones*.
Dos *razones* forman una **proporción** solamente si los productos cruzados son iguales.

Esto nos lleva a la **propiedad fundamental de las proporciones**:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = bc \text{, donde } b \text{ y } d \neq 0.$$

■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

40. Según la información nutricional de una caja de espárragos, cuatro piezas de espárragos contienen 15 calorías. ¿Cuántas piezas de espárragos contendrán 50 calorías?

41. Según una tabla nutricional que viene en un recetario, tres onzas de huachinango proveen 22 gramos de proteínas. ¿Cuántas onzas proporcionarían 242 gramos de proteínas?

42. Un automóvil puede recorrer una distancia de 250 km con 15 litros de gasolina. ¿Cuántos litros requerirá para recorrer 500 km?

43. Un motor de una licuadora gira 36 revoluciones en tres segundos. ¿Cuántas revoluciones girará en un minuto?

44. Resuelve las siguientes proporciones:

a) $\frac{9}{12} = \frac{x}{60}$ b) $\frac{12}{35} = \frac{y}{20}$ c) $\frac{7}{14} = \frac{58}{z}$ d) $\frac{2}{w} = \frac{5}{100}$

45. Si uno consume 90 gramos de cierto cereal, el cuerpo estaría absorbiendo 400 calorías. ¿Qué cantidad de cereal necesitaríamos comer para absorber 1000 calorías?

46. Un automóvil gasta 5 litros de gasolina por cada 100 km. Si quedan en el depósito 8 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el coche?

2.5.3 REGLA DE TRES SIMPLE: DIRECTA E INVERSA

La regla de tres simple se apoya en los criterios de las proporciones; es una operación que tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporción, cuando se conocen tres de sus elementos.

La regla de tres simple está constituida de *supuestos y preguntas:*
Los **supuestos** son los datos de la parte del problema que ya se conocen,
y las **preguntas** son parte del problema que contiene la incógnita.

- La regla de tres puede ser *directa* o *inversamente* proporcional:

Formas de la Regla de Tres	
Directa	Esta regla se utiliza cuando las magnitudes del problema son directamente proporcionales a la incógnita.
Inversa	Esta regla se utiliza cuando las magnitudes del problema varían en forma inversamente proporcional a la incógnita.

Para entender cuándo aplicar cada una de las dos formas de la regla de tres, comencemos por las siguientes actividades.

Se te sugiere que colabores en equipo y discutas tus resultados tanto con el profesor como con otros equipos.

ACTIVIDAD 47

En una casa editorial, 5 personas tardaron 1720 hrs para editar una revista. ¿Cuántas horas ocuparán para editar la misma revista 8 personas?

ACTIVIDAD 48

Una fotografía muestra a un niño parado junto a un enorme cactus. Si el niño mide en realidad 48 pulgadas y en la foto el niño mide 0.6 pulgadas y el cactus 3.25 pulgadas, ¿cuánto mide en realidad el cactus?

ACTIVIDAD 49

Si una milla equivale aproximadamente a 1.6 km y la distancia en millas de San Diego a San Francisco es de 520 millas, ¿cuál es la distancia entre esas dos ciudades en kilómetros?

ACTIVIDAD 50

En un accidente de tráfico se pierden $\frac{7}{11}$ de la carga de un camión que transportaba melones. Si el monto de la pérdida es de $ 9100 y transportaba 1000 kg en melones,

- ¿Cuál era el monto del cargamento completo?
- ¿Cuántos kg de melones se perdieron en el accidente?
- ¿Cuánto es el costo de pérdida por kg de melón?

✍ EJEMPLO 38

Si en una librería 4 libros del mismo tema cuestan \$200, ¿cuánto costarán 15 libros?

SOLUCIÓN

Identifiquemos la incógnita:

$$x = \text{precio de los 15 libros.}$$

La proporción sería la siguiente:

$$\frac{4}{200} = \frac{15}{x}.$$

Despejando x tenemos $x = 750$. De esta manera, los 15 libros costarán \$750.

- Existe otra forma de plantear lo anterior, mediante el siguiente arreglo, llamado ***regla de tres:***

$$4 \text{ libros} \rightarrow \$\,200$$

$$15 \text{ libros} \rightarrow x.$$

Como la incógnita varía de modo directamente proporcional a las magnitudes del problema, resolviendo para x, obtenemos

$$x = \frac{15 \times 200}{4}$$

$$x = 750.$$

- El resultado coincide con el método anterior.

✍ EJEMPLO 39

En una obra, 4 hombres terminan todo el trabajo en 12 días. ¿En cuántos días podrían hacer la misma obra 6 hombres?

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta que todos los hombres trabajan por igual y al mismo ritmo, identifiquemos la variable y = al número de días en que terminan la obra los 6 hombres. Planteando nuestra regla de tres:

$$4 \text{ hombres} \rightarrow 12 \textit{ días}$$

$$6 \text{ hombres} \rightarrow y$$

Como ahora podemos notar, la incógnita varía inversamente proporcional a los datos, resolviendo para y:

$$y = \frac{4\times 12}{6}$$

$$y = \frac{48}{6}$$

$$y = 8.$$

- 6 hombres terminarán la obra en 8 días.

✍ EJEMPLO 40

Si un alumno ha realizado $\frac{2}{3}$ de su tarea en 20 min, ¿cuánto tiempo le llevará realizarla completa?

SOLUCIÓN

Identificamos la incógnita z = tiempo que le llevará realizar al alumno la tarea completa. Planteamos la regla de tres:

$$20\ min \rightarrow \frac{2}{3}\ \text{tarea}$$

$$z \rightarrow \frac{3}{3}\ \text{tarea.}$$

Como la incógnita varía directamente, ya que es el mismo alumno y no hay otra persona que lo pueda ayudar para hacerlo más rápido, la solución para z es:

$$z = \frac{20\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$z = 30\ \text{min.}$$

47. En una escuela, por fin de año, los alumnos pintarán las paredes de su salón de clases. Si 12 alumnos lo hacen en 130 min, ¿cuántos alumnos se requieren para poder pintarlo en 1 hora?

48. Si queremos endulzar agua de melón, y sabemos que 250 gramos de azúcar se diluyen en 5 litros, ¿cuántos litros de agua de melón hay que añadir para que la mezcla contenga 8 gramos de azúcar por litro?

49. Si 25 trabajadores tardan 80 días en hacer un pequeño edificio, ¿cuántos días aproximadamente tardarían 70 trabajadores en hacer el mismo trabajo?

50. Un ganadero tiene pastura suficiente para alimentar a 300 borregos durante 50 días. ¿Por cuántos días podrá alimentar el ganadero a 500 borregos con la misma cantidad de pastura?

51. Un empleado que trabaja $6\frac{1}{2}hr$ diarias, recibe como salario $4800.00 al mes. Su jefe le ha informado que se le aumentarán dos horas de trabajo. ¿Cuál será su nuevo sueldo mensual?

52. Un comerciante de telas desea saber cuántos metros de tela debe vender para obtener una ganancia de $2000.00, si por cada 50 metros de tela vendidos gana $100.00. ¿Podrías determinar cuántos metros debe vender?

53. Un vuelo comercial que parte de la ciudad de México con destino a Mexicali, tarda $3\frac{1}{2}hrs$ con una velocidad promedio de $275\frac{millas}{hr}$. ¿A qué velocidad viajaba el avión si una semana después recorre la misma distancia en $2\frac{3}{4}hrs$?

2.5.4 PORCENTAJE

Una de las principales aplicaciones de los números decimales proviene del uso de porcentajes. En algunas ocasiones hemos escuchado frases como: el índice de pobreza disminuyó en tres por ciento, la meta del gobierno es reducir en un cinco por ciento el índice de criminalidad en la república, el aumento del salario mínimo fue de un cinco por ciento, etc.

También los porcentajes están relacionados con las proporciones, ya que calcular el tanto por ciento ***t* %**, de una cantidad **A** consiste en encontrar una cantidad **B**, de forma que **A** y **B** estén en la misma proporción que **100** y ***t***. Así, si el ***t* %** de una cantidad **A** es otra cantidad **B**, se verifica:

$$\frac{A}{B}=\frac{100}{t}.$$

Por ejemplo, cuando mencionamos que "25% de las personas que forman un parlamento son de la oposición", se está diciendo que de cada 100 parlamentarios, 25 son de la oposición. Por tanto, con tener dos de estos datos, se puede averiguar el tercero.[17]

Las siguientes actividades te permitirán comprender este concepto.

🛠 ACTIVIDAD 51

En una clase de 30 alumnos, 8 practican la natación y 22 juegan al fútbol.

- ¿Cuál es el porcentaje de los alumnos que practican natación?
- ¿Cuál es el porcentaje de los alumnos que juegan fútbol?

🛠 ACTIVIDAD 52

Si en un aparador de un centro comercial, se encuentra que un artículo tiene un precio etiquetado de $250, y tiene un descuento del 35%, ¿cuál es el precio que se pagará por el artículo?

🛠 ACTIVIDAD 53

Un trabajador de una mina del norte del país gana $2800 al mes, pero como compensación por un accidente, le incrementaron el sueldo a $3000. ¿Cuál fue el porcentaje en el que se incrementó su sueldo?

🛠 ACTIVIDAD 54

Por fin de temporada, una marca de ropa anuncia que toda su mercancía está con "rebajas sobre rebajas". Si un pantalón cuesta $250 y tiene una rebaja inicial de 20%, y después tiene adicionalmente una rebaja del 5%, ¿cuál será el precio final del pantalón?

- ¿Será igual este precio si se le aplica sólo un descuento del 25%?

- Explica tu respuesta.

[17] Estos problemas se pueden plantear utilizando la regla de tres. Consulta la sección anterior.

El ***porcentaje*** se deriva de las palabras “por ciento” y se representa acompañado del símbolo **%**.

Al escribir 1%, que se lee “uno por ciento”, lo que estamos diciendo es: “una parte de cien”, y lo escribimos como una fracción propia o común,

$$1\% = \frac{1}{2} = 0.01.$$

Por lo que en general definimos

$$n\% = \frac{n}{100}.$$

✍ EJEMPLO 41

Si en la compra de un artículo nos hacen un descuento de \$87.5, y nos dicen que el descuento fue del 35%, ¿cuál es el precio con el que está marcado el artículo?

- ¿Cuánto se pagó por ese artículo?

SOLUCIÓN

Identificamos la incógnita: x = Precio del artículo. Estableciendo el porcentaje en forma de proporción, tendremos

$$\frac{87.5}{35} = \frac{x}{100}.$$

Resolviendo para x

$$x = \frac{87.5 \times 100}{35}$$

$$x = 250.$$

- Por lo tanto el precio del artículo es de \$250, y lo que se pagó por él lo obtenemos de la resta:

$$250 - 87.5 = 162.5.$$

✍ EJEMPLO 42

Una persona desea rentar un apartamento en el centro histórico del D.F. Si al comienzo del año la renta es de \$10000 y aumentará un 5% el mes de diciembre, ¿cuánto pagará de renta en diciembre?

SOLUCIÓN

Primero identificamos la variable: y = Aumento en el mes de diciembre. Anotando el porcentaje como proporción, obtenemos

$$\frac{10000}{100} = \frac{y}{5}.$$

Resolviendo para y

$$y = \frac{5 \times 10000}{100}$$

$$y = 500.$$

De esta manera, la renta que se deberá pagar en el mes de diciembre es de \$10500.

✍ EJEMPLO 43

En una barata de línea blanca, un refrigerador tiene un precio de \$7000, y se ofrece un descuento del 15%; pero si se paga en efectivo, hacen un descuento adicional del 5%. ¿Cuánto se pagará por el refrigerador si el pago es en efectivo?

SOLUCIÓN

Identificando la variable para el primer descuento: x = Cantidad del primer descuento. Escribimos el porcentaje como proporción

$$\frac{7000}{100} = \frac{x}{15}.$$

Resolviendo para x

$$x = \frac{15 \times 7000}{100}$$

$$x = 1050.$$

- De esta manera, el precio del refrigerador con el primer descuento es de: 7000 - 1050 = 5950.

Ahora hagamos el segundo descuento: y = Monto del segundo descuento. El porcentaje lo da la proporción correspondiente

$$\frac{5950}{100} = \frac{y}{5}.$$

Resolviendo para y

$$y = \frac{5 \times 7000}{100}$$

$$y = 297.5.$$

- De esta manera, el precio final por pagarlo en efectivo es de: 5950 - 297.5 = 5652.5.

Nota: Si hacemos el descuento directo del 20% al artículo, el precio sería de \$ 5600; de esta forma no es lo mismo un sólo descuento del 20%, que un primer descuento del 15% y luego un segundo descuento del 5%.

Hay reglas muy sencillas para pasar de decimales a porcentajes, de fracción a porcentajes y viceversa. A continuación los enunciamos:

Conversión	
Porcentaje a Decimal:	Quita el signo % y mueve el punto decimal dos lugares a la izquierda. Si es necesario, inserta ceros para ocupar los lugares faltantes.
Decimal a Porcentaje:	Mueve el punto decimal dos lugares a la derecha y añade ceros —si es necesario— para ocupar los lugares faltantes. Finalmente añade el signo %.
Fracción a Porcentaje:	Aplicando las reglas anteriores, convierte la fracción a decimal y, en seguida, convierte este decimal a porcentaje. Finalmente añade el signo %.

54. Si un obrero en España gana 1600 euros al mes y su empresa le incrementará el sueldo un 11%, ¿cuál será su nuevo salario?

55. Encuentra el porcentaje indicado para las siguientes cantidades:

a) 2 % de 59
b) 40 % de 1675
c) 17.5 % de 240

56. Para las siguientes cantidades ¿qué porcentaje de:

a) 224 representa 45?
b) 500 representa 50?
c) 32 representa 3?
d) 18 representa 2?

57. En un examen de 40 preguntas, un estudiante tuvo 32 aciertos. ¿Cuál es su porcentaje de respuestas correctas?

58. Un equipo de aire acondicionado fue vendido en \$7000 luego de aplicarle un 20% de descuento. ¿Cuál es su precio normal?

59. Un terreno de 300 hectáreas es cultivado de la siguiente forma: 25% de arroz, 30% de maíz y 45% de frijol. ¿Qué cantidad de hectáreas están sembradas de maíz, arroz y frijol?

60. Si una prenda cuesta \$349 (sin IVA), ¿se podrá comprar la prenda con \$420?

61. Una tienda departamental hace descuentos por fin de temporada sobre lo ya rebajado. Karen desea comprar un artículo cuyo precio es de \$646 y que tiene un descuento del 50%. La promoción indica un 15% de descuento adicional sobre lo ya rebajado. ¿Cuánto pagará Karen al final por el artículo?

■ UNIDAD 3

GEOMETRÍA

PROPÓSITO

Conocerás y aplicarás las fórmulas básicas de la geometría para calcular perímetros y áreas de figuras geométricas. Asimismo, tendrás bases para poder aplicar conceptos geométricos en otras disciplinas.

INTRODUCCIÓN

"No entre aquí quien no sea versado en geometría"

La máxima anterior se encontraba grabada a la entrada de la Academia de Platón, para mostrar la forma en que sus discípulos privilegiaban a la geometría. *geometría*, etimológicamente, significa: *medición de la tierra*, lo cual nos sugiere que los antecedentes de esta discipina se referían a problemas prácticos para medir tierras y territorios. Por fortuna, la geometría y los geómetras fueron más allá de sólo medir terrenos —lo cual en sí no es nada interesante— y, con el tiempo, esta área se independizó y adquirió las cualidades que ahora posee y que representan un reto para quienes se aventuran en sus dominios.

Muchos años antes de Cristo, los griegos, entre ellos Tales de Mileto, habían observado cuidadosamente las matemáticas que hacían sus contemporáneos de otras naciones, como los egipcios, babilonios, persas, etc. Basados en eso —y ello constituye el arranque de las matemáticas como se conocen ahora—, formularon la manera de ejercerlas como un asunto del intelecto al igual que del arte, y no excluyeron la posibilidad de que pudieran ser atractivas.

3.1 FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA PLANA: PUNTO, RECTA Y PLANO

Para las actividades que encontrarás en esta unidad, reúnete en equipo y discute su posible solución, escríbela de la manera más clara posible y compártela con tus compañeros.

■ EL ORIGEN DE LA GEOMETRÍA A PARTIR DE UN PUNTO

Para iniciar el estudio de la geometría podríamos partir del concepto de ***punto***: una entidad matemática sin magnitud ni dimensión[18], pero con ubicación en el espacio. Imagina un punto muy diminuto:

.

Es claro que el dibujo anterior no representa un punto en el sentido al que nos referimos, pues cuenta con dimensiones, aunque éstas sean muy pequeñas. De entrada, así como los griegos lo concibieron, los entes matemáticos son un asunto que requiere que empleemos mucho nuestra imaginación.

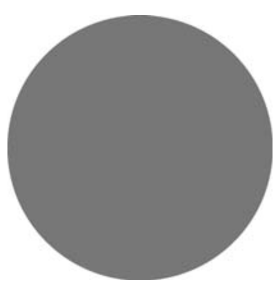
Ahora bien, imaginemos que al deplazarse este punto en cierta dirección, describe un ***segmento de recta***:

Éste, al desplazarse, ha dado lugar a un objeto que cuenta con **una dimensión**, es decir, tiene **longitud**.

Llevemos más lejos nuestro ejercicio de imaginación, ahora pensemos que este segmento se desplaza, por ejemplo, hacia abajo, la misma distancia que su longitud:

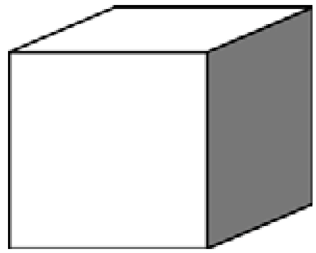
¡Este hecho ha dado lugar a una ***figura cuadrangular***! Ésta cuenta con **dos dimensiones**: **longitud** y **anchura** lo que, por otra parte, implica que posee un **área**.

De hecho, el segmento de recta pudo haber rotado alrededor de su centro, lo que habría dado lugar a un círculo; figura que de igual manera está contenida en dos dimensiones y posee un **área**:



[18] Entenderemos como *dimensión* aquella que nos permite definir largo, ancho y alto en términos de longitudes.

Pero vayamos más lejos en este ejercicio: pensemos que el cuadrado anterior se barre hacia nuestros ojos. Lo que ocurrirá, y que tal vez ya te hayas imaginado, es que se generará una figura **tridimensional**, propiamente un ***cubo***:



Tal cuerpo geométrico tiene **tres dimensiones**: **largo**, **ancho** y **alto**. Posee un **volumen**.

Los griegos notaron que las entidades matemáticas que ellos descubrían, y que surgían, por decirlo así, de la nada, tenían propiedades que no dependían de quien las examinara. Los entes matemáticos, aún cuando no se les pudiera definir con precisión, conformaban un mundo independiente del hombre, gobernado por leyes propias.

Al estudiar las propiedades de los entes geométricos, los griegos, después de muchos años de estudio, llegaron a un perfeccionamiento en el arte de la geometría, y plasmaron sus hallazgos en una obra monumental, cuya validez pervive hasta la fecha: *Los Elementos*, un conjunto de libros recopilado por el matemático *Euclides* mucho antes de nuestra era, y que, después de la *Biblia*, ha sido uno de los libros más publicados.

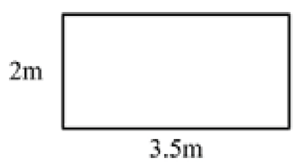
Euclides de Alejandría *(c.325 - c.264 a.c.), matemático de origen griego que es principalmente reconocido y recordado por su tratado sobre geometría, llamado* **Los Elementos** *(una de cuyas páginas aquí se ilustra).* Sus descubrimientos han influenciado el desarrollo universal de las matemáticas durante los últimos 2000 años.

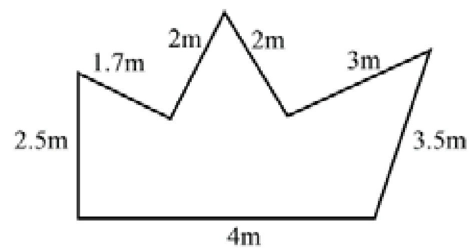
3.1.1 PERÍMETRO Y LONGITUD

Con el fin de adentrarnos en el tema, vamos a realizar una actividad referente al **perímetro**, de tal manera que proporcionemos una primera definición de su significado.

🛠 ACTIVIDAD 1

Las ventanas de la casa de una persona tienen las siguientes características:





- a) Si la persona desea adornar sus ventanas alrededor de ellas, es decir, en las orillas o en el contorno de estas figuras, ¿cuántos metros de adorno necesitaría comprar para cada ventana?

Uno de los conceptos que utilizaremos y que aprenderemos a calcular, se conoce como: **perímetro**, concepto ampliamente utilizado para medir longitudes.

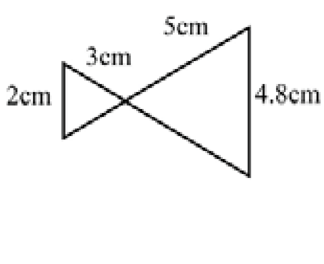
La longitud que encontraste para cada figura geométrica anterior, es justamente el perímetro**.** Más adelante, aprenderemos también a calcular perímetros de figuras cuyos lados no son necesariamente líneas rectas, como por ejemplo contornos circulares u otras. Por el momento nos concentraremos en aquellas figuras cuyos lados son líneas rectas.

- b) ¿Cómo obtuviste el perímetro de las figuras anteriores?

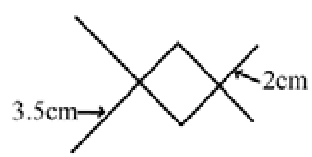
🛠 ACTIVIDAD 2

Intentemos obtener el perímetro de estas figuras:

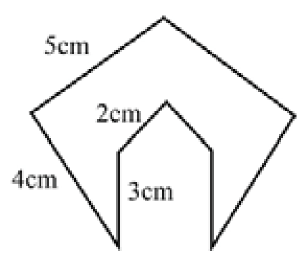
a)



b)



c)



d)

Habrás notado que, para calcular el perímetro de una figura compuesta de líneas rectas, se suman las longitudes de sus lados. De acuerdo a las actividades anteriores del cálculo de perímetro:

- Describe con tus propias palabras el significado de perímetro de una figura geométrica compuesta por líneas rectas.

🛠 ACTIVIDAD 3

Utiliza la definición que has dado para calcular el perímetro de las siguientes figuras geométricas, llamadas *polígonos regulares* (un **polígono regular** es aquel cuyos lados y ángulos miden lo mismo), donde **L** es la medida de cada uno de sus lados. Por ejemplo, el perímetro de la primera figura (**triángulo equilátero**), es: **L+L+L = 3L**.

Un **polígono regular** es una figura geométrica plana
en la que todos sus lados tienen la misma longitud, y sus ángulos son iguales.

🛠 ACTIVIDAD 4

De acuerdo a la definición anterior, ¿cuál es la fórmula para calcular el perímetro de un **polígono regular** de ***n*** lados, donde la longitud de uno de sus lados es **L**?

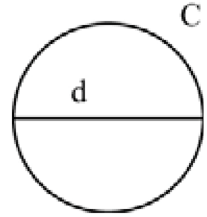
- Explica cuál fue tu razonamiento.

El **perímetro** de una figura plana, compuesta de segmentos de línea,
es la suma de las medidas de esos segmentos.

Haciendo uso de la imaginación, pensemos que con una cuerda somos capaces de rodear el contorno de una figura plana dada, y a continuación extendemos la cuerda y medimos su longitud. Esto es equivalente a medir por separado los lados de una figura y luego sumar las magnitudes. Lo que estaremos calculando será el perímetro de la figura.

3.1.2 CÍRCULO

Para calcular el perímetro de un círculo, consideremos un círculo de ***radio r***, ***diámetro d*** y ***circunferencia C*** (por **circunferencia** entendemos la longitud que comprende el contorno de un círculo, esto es, el perímetro), como en la siguiente figura:



Como el **radio** es la distancia del centro del círculo a un punto de la circunferencia, entonces el **diámetro** es el doble del radio, esto es: $d = 2r$.

🛠 ACTIVIDAD 5

Con la ayuda de una cuerda, mide la circunferencia de un círculo de cualquier tamaño. A continuación, mide el diámetro del mismo círculo con otra porción de cuerda, y averigua cuántas veces cabe la longitud del diámetro en la circunferencia. Repite este proceso con círculos más grandes o más pequeños.

- a) ¿Qué observas en este experimento?
- b) ¿Cuántas veces cabe la longitud del diámetro en la circunferencia?
- c) ¿Importa el tamaño del círculo?

Efectivamente, el diámetro de un círculo cualquiera cabe 3 veces en la circunferencia, y siempre sobra un tramo. Este patrón se repite con círculos cualquier tamaño.

Si dispusiéramos de una medida más fina, nos daríamos cuenta de que el diámetro de un círculo cabe 3.1416 veces aproximadamente en su circunferencia; es decir, si dividimos la circunferencia entre el diámetro de un círculo, el resultado es siempre 3.1416. El resultado de esta medición es en realidad una aproximación para el número π : recordemos que el número π vale aproximadamente 3.1416.

Los griegos descubrieron que en efecto existía un **número especial** que, funcionando como una proporción, relacionaba la longitud de la circunferencia con el diámetro —sin importar el tamaño del círculo.

Esto es, para un círculo cualquiera, $\frac{C}{d} = \pi$.

Usualmente, el valor que se le da al número π es 3.1416. Sin embargo, su valor aproximado es: *3.14159265358979323846264338327950...* Este número, como sabrás, es un decimal no periódico, o sea un *irracional*, y no es trivial el cálculo de sus dígitos.

Los griegos aproximaron el número π con la fracción $\frac{22}{7}$.

Pero fueron los chinos quienes tuvieron mejores acercamientos a él. Las computadoras modernas permiten calcular millones de dígitos; pero nunca se terminaría, pues éstos son infinitos y, además, no se rigen por un patrón conocido —misterio que hasta la fecha sigue inspirando a los matemáticos. [19]

[19] Curiosamente, los antiguos geómetras griegos no emplearon esta letra griega; fue Leonard Euler, matemático suizo, quien la introdujo hasta el siglo XVIII. Usó la primera letra del término griego *periferium*, es decir, *periferia* (π es la letra griega para *p*).

Regresando a la igualdad anterior, tenemos que $\boldsymbol{\frac{C}{d}=\pi}$,

así que si efectuamos un sencillo despeje, obtenemos $C=\pi d$.

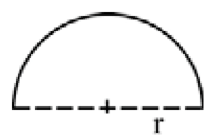
Ahora, tomando en cuenta que $\boldsymbol{d = 2r}$, la igualdad anterior se escribe $C=2\pi r$, que es la famosísima fórmula que conocemos.

La **circunferencia *C*** de un círculo de **diámetro *d*** se obtiene por medio de la fórmula $C=\pi d$.
También la **circunferencia *C*** de un círculo de **radio *r*** se da por la fórmula $C=2\pi r$.

Hasta aquí hemos empleado la letra C para referirnos exclusivamente a la circunferencia (perímetro) de un círculo. Sin embargo, para no confundir, ahora seguiremos usando la letra P para referirnos al perímetro de cualquier figura.

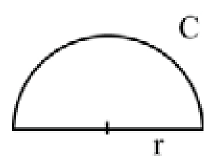
ACTIVIDAD 6

Deduce la fórmula para calcular el perímetro de un medio círculo de radio *r:* (No incluyas la línea punteada.)



ACTIVIDAD 7

Apartir de la relación anterior, proporcionar una fórmula para calcular el perímetro de la misma figura, sólo que ahora debes incluir la línea punteada:

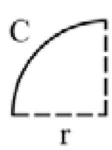


ACTIVIDAD 8

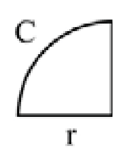
Ahora no te será difícil deducir la fórmula para calcular el perímetro de:

a) el segmento de un cuarto de círculo, y

b) el perímetro de un cuarto de círculo.



a)

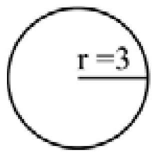


b)

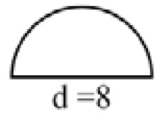
Nota: siempre que en una figura aparezcan líneas punteadas, éstas no se deberán tomar en cuenta para el cálculo del perímetro.

🛠 ACTIVIDAD 9

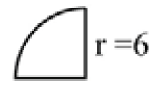
Pongamos en práctica las fórmulas anteriores para calcular el perímetro de las siguientes figuras:



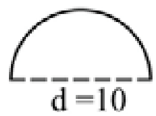
a)



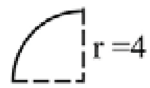
b)



c)



d)



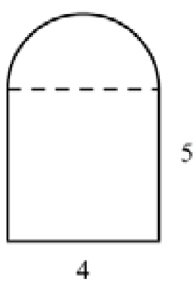
e)

- ¿Habrá perímetros que se relacionen mediante un múltiplo entero? Esto es, que al dividir el perímetro mayor entre el menor, el resultado sea un número entero.

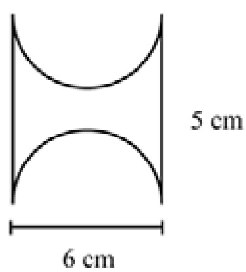
- Explica.

🛠 ACTIVIDAD 10

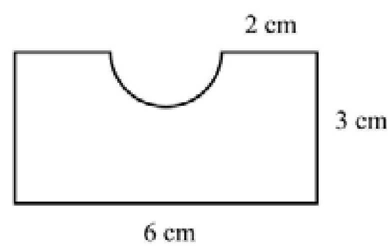
Ahora te será simple calcular el perímetro de las siguientes figuras, compuestas con líneas rectas y curvas. Aquí también será necesario ocupar algunas de las fórmulas que ya obtuviste. Inténtalo:



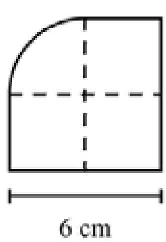
a)



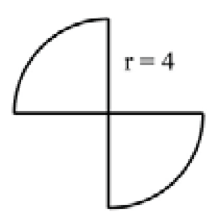
b)



c)



d)



e)

- ¿Cuál de ellas te pareció más difícil de calcular?

- ¿Por qué?

3.2 CONCEPTO INTUITIVO DE ÁREA

Ahora nos ocuparemos del concepto de **área**. El significado de área de una figura geométrica no debe confundirse de ningún modo con el de **perímetro.** Veamos las definiciones:

Perímetro	***Área***
El perímetro es, esencialmente, una **longitud**, y se obtiene midiendo el contorno de la figura plana dada. Sus unidades de medición son lineales: *cm, m, km, pies,* etc.	El área no puede medirse directamente: es el resultado de una operación relativa al **producto**. Sus unidades de medición son cuadradas: cm^2, m^2, km^2, $pies^2$, etc.

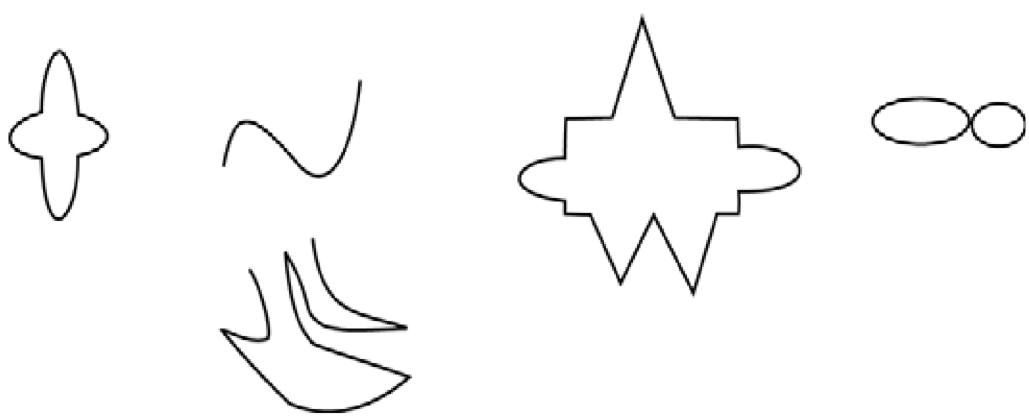
Por ejemplo, el área de un cuadrado involucra medir base y altura (no todo el perímetro), y multiplicar ambas longitudes. Más adelante se detalla la fórmula.

🛠 ACTIVIDAD 11

Con tus propias palabras, menciona ¿qué diferencia existe entre los conceptos de área y perímetro de una figura geométrica?

🛠 ACTIVIDAD 12

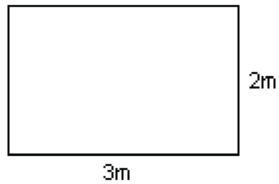
Pinta de un color el perímetro y de otro color el área de las siguientes figuras.



- ¿Todas las figuras anteriores tienen área?
- Si respondiste que no, comenta por qué.
- Con tus propias palabras menciona qué entiendes por área de una figura geométrica.
- ¿Qué tipo de figuras tienen área y cuáles no?
- ¿Por qué?

ACTIVIDAD 13

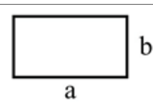
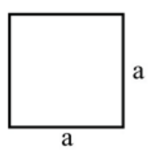
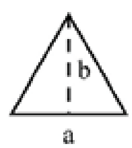
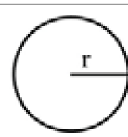
Recordemos que en la fórmula para calcular el **área de un rectángulo** se multiplica su *base por* su *altura*. Calcula el área del siguiente rectángulo. Después, calcula su perímetro.



Observarás que no coinciden ambos cálculos. El área es la superficie del mismo, es decir el interior; mientras que el perímetro es el contorno de la figura. Como mencionamos anteriormente, son dos cosas totalmente distintas.

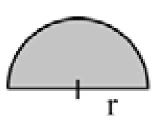
En tus cursos previos de geometría, utilizaste en algún momento las fórmulas para calcular el área del triángulo, círculo, paralelogramo, etc. Sin embargo, quizá nunca te preguntaste de dónde surgían dichas fórmulas.

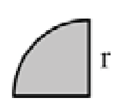
Para familiarizarnos con la aplicación de algunas de ellas, haremos actividades de cálculo de áreas, y más adelante veremos cómo se deducen dichas fórmulas. Observa la siguiente tabla para el área de figuras geométricas comunes:

Figura geométrica	***Representación gráfica***	***Fórmula***
Rectángulo		$A = a \cdot b$
Cuadrado		$A = a \cdot a = a^2$
Triángulo		$A = \frac{a \cdot b}{2}$
Círculo		$A = \pi r^2$

ACTIVIDAD 14

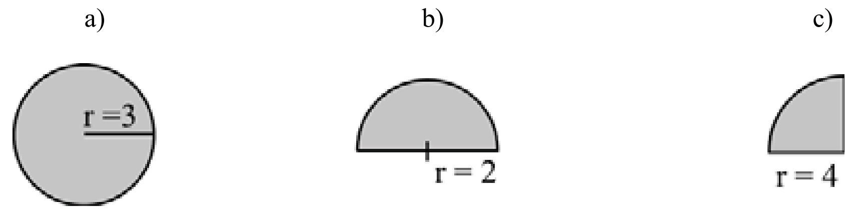
A partir de la fórmula del área para el círculo, deduce la fórmula para calcular el área de un medio círculo y de un cuarto de círculo.





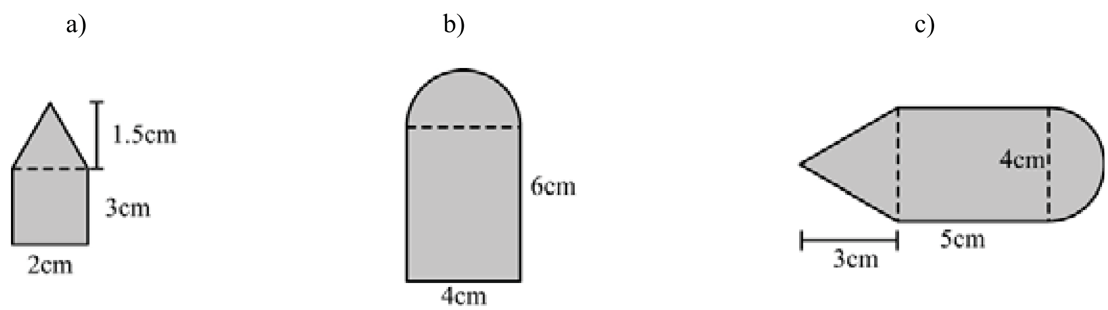
🛠 ACTIVIDAD 15

De acuerdo a las fórmulas que obtuviste, calcula el área de las siguientes figuras. Aquí tendrás que hacer una sustitución del valor del radio.



🛠 ACTIVIDAD 16

Intenta calcular el área de las siguientes figuras, que son combinaciones de rectángulos, triángulos y círculos.



A continuación damos el concepto de área:

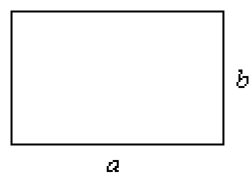
Área es la medida de la región o porción limitada de un plano.

3.2.1 DEDUCCIÓN DE FÓRMULAS PARA EL ÁREA DE FIGURAS BÁSICAS

Ahora, deduciremos las fórmulas para el cálculo de área de algunas figuras geométricas, partiendo de que conocemos la fórmula para calcular el área de un rectángulo.

■ RECTÁNGULO

Partamos de lo ya conocido para un rectángulo. Tomemos un **rectángulo** de base *a* y altura *b* como en la figura:

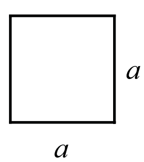


- El **área** A de este rectángulo es $A = a \cdot b$.
- El **perímetro** del rectángulo será la suma de todos los lados: $P = a+a+b+b = 2a+2b = 2(a+b)$.

A partir de lo anterior, podemos deducir las áreas de otras figuras planas.

■ CUADRADO

Observemos que si la base y la altura coinciden y son, por ejemplo *a*, entonces tendremos un **cuadrado** de área a^2 .



$$A = a \cdot a = a^2$$

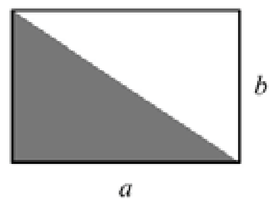
- El **área** A de este cuadrado es $A = a^2$.
- El **perímetro** del cuadrado será la suma de todos los lados: $P = a+a+a+a = 4a$.

Observemos que área y perímetro no coinciden.

■ TRIÁNGULO

Nuevamente, conociendo la fórmula del área del rectángulo, podemos deducir la fórmula para obtener el área del **triángulo**.

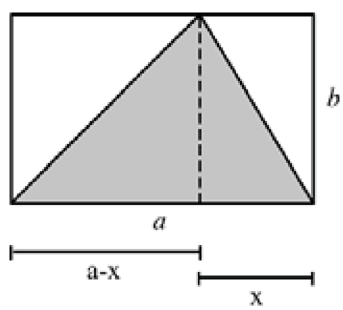
Empecemos con un **triángulo rectángulo** (recordemos que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de 90° o *ángulo recto*):



Resulta inmediato ver que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo en el que está trazado; por lo tanto, el área del triángulo rectángulo es:

$$A=\frac{a\cdot b}{2}.$$

Para calcular el área de un triángulo en general (aunque no sea triángulo rectángulo), imaginémoslo inscrito también dentro de un rectángulo, como en la figura siguiente:



Observemos que hemos dividido nuestro triángulo en 2 triángulos rectángulos. La parte de la base del triángulo en el lado izquierdo a la línea punteada es $a-x$, la parte complementaria de la base es: x. Calculando el área de ambos subtriángulos rectángulos, tenemos:

$$A=\frac{(a-x)\cdot b}{2}+\frac{x\cdot b}{2}=\frac{ab-xb}{2}+\frac{xb}{2}=\frac{ab}{2}-\frac{xb}{2}+\frac{xb}{2}=\frac{a\cdot b}{2}.$$

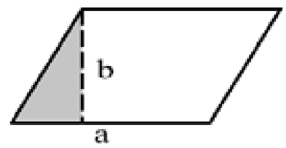
Es decir, el área del triángulo es:

$$A=\frac{a\cdot b}{2},$$

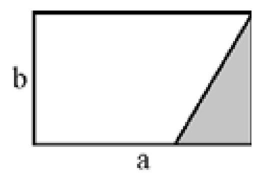
que es, de nuevo, la fórmula que conocíamos de nuestros estudios básicos de matemáticas; pero que ¡esta vez hemos deducido!

■ PARALELOGRAMO

Consideremos ahora el siguiente **paralelogramo** (figura de cuatro lados que tiene ambos pares de *lados opuestos paralelos*):



Si recortamos el triángulo sombreado y lo pegamos a la derecha, la figura resultante es un rectángulo, como se aprecia en la figura:

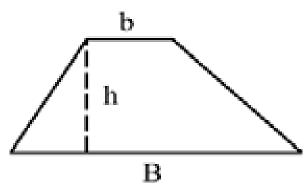


El área de este rectángulo, como ya lo sabemos, es: $A = a \cdot b,$ lo cual debe coincidir con el área del paralelogramo.

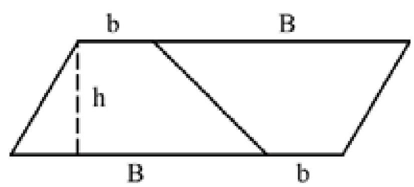
Por lo tanto, el área del paralelogramo es: $A = a \cdot b.$ ¡Igual a la del rectángulo!

■ TRAPECIO

Consideremos otra figura más, un **trapecio** con *base mayor B*, *base menor b* y *altura h*, como se muestra en la ilustración (un trapecio tiene sólo 2 lados paralelos):



Observemos que si pegamos dos trapecios idénticos, uno de ellos invertido, la figura resultante es un paralelogramo:



Este paralelogramo tiene base $B + b$ y altura h. Su área entonces es $A = (B + b) \cdot h.$

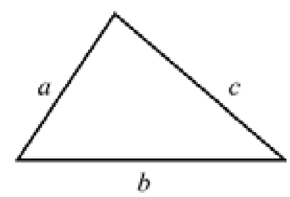
Puesto que el área del paralelogramo es el doble de la del trapecio original, entonces el área del trapecio es la mitad del área del paralelogramo.

Esto es, el área del trapecio es:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}.$$

۞ ***Es importante notar que, aunque esta relación para el área es la que aparece en los formularios de geometría, en este caso la has deducido sin necesidad de recurir al texto, empleando sólo las ideas básicas expuestas hasta ahora.***

Volviendo al triángulo, existe otra fórmula para obtener su área. La fórmula que hemos discutido hasta aquí implica que se conozcan la base y la altura. Supongamos que conocemos la longitud de sus 3 lados; pero la altura no necesariamente se conoce.



El perímetro de este triángulo es, como sabemos, la suma de los lados: $P = a + b + c$. Pero, ¿y su área?

Herón de Alejandría, prolífico inventor de la antigüedad, mostró que se puede calcular el **área de un triángulo conociendo sólo sus lados** (o su perímetro). La fórmula que él descubrió es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde s representa el semiperímetro del triángulo, dado por la fórmula:

$$s = (a+b+c)/2.$$

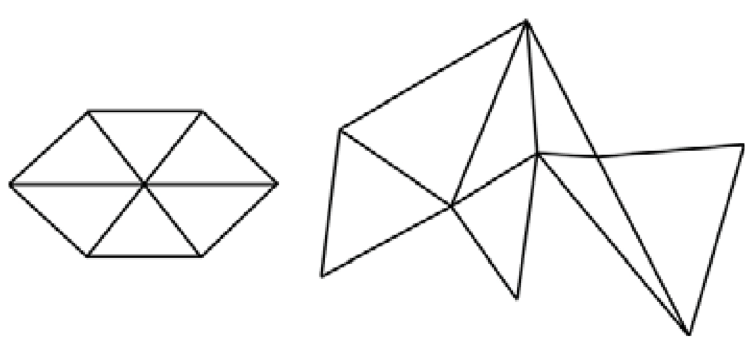
- Ejemplo de la *Fórmula de Herón*:

Dado un triángulo isósceles de lados 7, 7 y 3, determinar su área. Notemos que $s = \frac{17}{2}$. Luego, el área es:

$$A = \sqrt{17/2(17/2-7)(17/2-7)(17/2-3)} = \sqrt{1683}/4.$$

La fórmula que descubrió Herón tiene alcances insospechados, ya que nos permite calcular —en general— el área de cualquier **polígono** si primero lo triangulamos.

Por ejemplo, la fórmula de Herón se puede emplear para calcular el área de estos 2 **polígonos irregulares** (un *polígono irregular* es una figura geométrica plana en la que alguno de sus lados tiene diferente longitud, y alguno de sus ángulos es distinto):



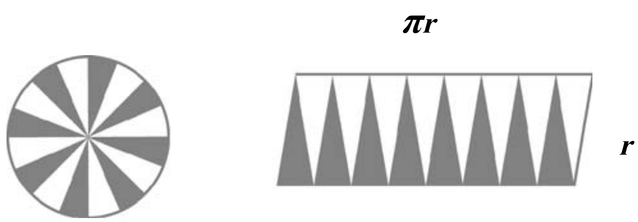
Un caso particular de los polígonos es el de los **polígonos regulares**, que ya estudiamos atrás. Para recordar un poco, son los que tienen todos los lados iguales, por ejemplo: el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono, el hexágono, etc. La fórmula para el área de los polígonos regulares no es difícil de deducir, empleando —entre otras técnicas— la aplicación de la fórmula de Herón.

Herón de Alejandría *(c.10 - 70 d.c.), ingeniero y geómetra de origen griego, fue uno de los inventores más prolíficos de la antigüedad. Se le atribuye, entre otros muchos diseños, la primera máquina de vapor documentada. Fue también investigador y profesor de matemáticas, mecánica, física y neumática. Descubrió la célebre fórmula que lleva su nombre (*Fórmula de Herón*), con la cual se puede calcular el área de cualquier triángulo conociendo únicamente la magnitud de uno de sus lados.*

■ CÍRCULO

Para calcular el **área** de un **círculo**, los griegos (se cree que *Arquímedes*) notaron que también se involucra el número π.

Para calcular el área del círculo, Arquímedes procedió de la siguiente forma: tomó un círculo de radio r y lo seccionó en rebanadas semejantes a gajos, reacomodándolos en una secuencia:



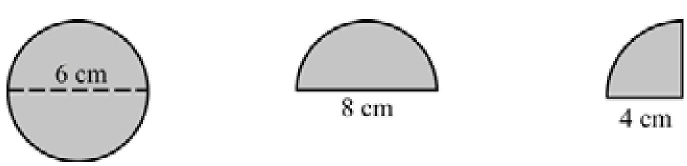
Mientras más pequeños se hagan los cortes, la figura de la derecha más se aproximará a un rectángulo. Los lados de ese rectángulo —se dio cuenta Arquímedes— correspondían al radio multiplicado por un factor k, ¡que nuevamente resultó ser el número π! De ahí que el área del círculo sea:

$$A = \pi r^2.$$

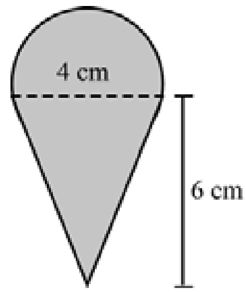
Veamos algunos ejemplos de cómo aplicar las fórmulas que hemos deducido. Si trabajas en equipo, comenta con los integrantes otras formas posibles de solución.

✍ EJEMPLO 1

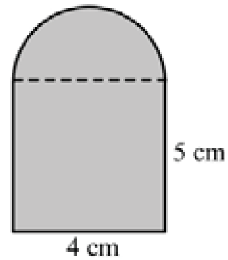
Determina el área de las siguientes 5 figuras:



a) b) c)



e)



f)

SOLUCIONES

a) Aquí el diámetro es *6cm*, por lo que el radio $r = 3cm$. Entonces

$$A = \pi \cdot (3\text{cm})^2 = \pi \cdot 9\text{cm}^2 = 9\pi\, cm^2$$

$$A = 9\pi\, cm^2 .$$

b) La fórmula que obtuviste para un medio círculo de radio *r*, fue

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} .$$

Aquí el radio es: $r = 4cm$. Entonces

$$A = \frac{\pi \cdot (4\text{cm})^2}{2} = \frac{\pi \cdot 16\text{cm}^2}{2} = 8\pi\, cm^2$$

$$A = 8\pi\, cm^2 .$$

c) La fórmula para un cuarto de círculo de radio *r* es:

$$A = \frac{\pi \cdot (r)^2}{4} .$$

Aquí el radio $r = 4cm$. Entonces tenemos que

$$A = \frac{\pi \cdot (4\text{cm})^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16\text{cm}^2}{4} = 4\pi\, cm^2$$

$$A = 4\pi\, cm^2 .$$

d) Para esta figura tendremos que sumar dos áreas, la del triángulo y la del medio círculo.

Área del triángulo:

$$A = \frac{4\text{cm} \cdot 6\text{cm}}{2} = \frac{24\text{cm}^2}{2} = 12\, cm^2$$

$$A = 12\text{cm}^2.$$

Área del medio círculo:

$$A = \frac{\pi \cdot (2\text{cm})^2}{2} = \frac{\pi \cdot 4\text{cm}^2}{2} = 2\pi\, cm^2.$$

Por lo tanto, el área total es:

$$A = (12 + 2\pi)cm^2.$$

e) Esta fígura se forma por un rectángulo y un medio círculo.

Área del rectángulo:

$$A = 4\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 20\text{cm}^2.$$

Área del medio círculo:

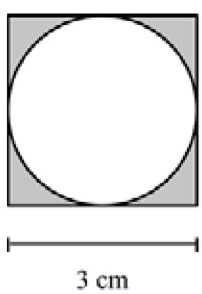
$$A = \frac{\pi \cdot (2\text{cm})^2}{2} = \frac{\pi \cdot 4\text{cm}^2}{2} = 2\pi\, cm^2.$$

Por lo tanto, el área total es:

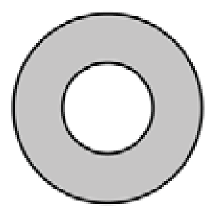
$$A = (20 + 2\pi)cm^2.$$

✍ EJEMPLO 2

Calcular el área sombreada de las siguientes figuras:



a)



b)

SOLUCIONES

a) Si calculamos el área del cuadrado y le restamos el área del círculo inscrito, tendremos el área requerida. Por lo tanto, el área de la región sombreada es

$$A = (3\text{cm})^2 - \pi(1.5\text{cm})^2 = 9\text{cm}^2 - \pi(2.25\text{cm}^2) = (9 - (2.25)\pi)cm^2$$

$$A = (9 - (2.25)\pi)cm^2.$$

b) Calculamos primero el área del círculo grande, y le restamos el área del círculo pequeño. Así, el área de la región sombreada es

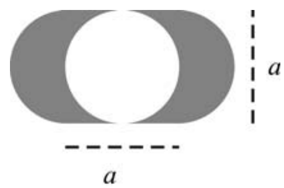
$$A=\pi(3\mathrm{cm})^2-\pi(2\mathrm{cm})^2=\pi 9\mathrm{cm}^2-\pi 4\mathrm{cm}^2=(9\pi-4\pi)cm^2=5\pi cm^2$$

$$A=5\pi\, cm^2.$$

۞ ***Se debe escribir 5π y no π5; es decir, primero se escribe el número y después la letra griega*** **pi** ***(π).***

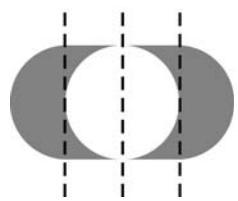
✍ EJEMPLO 3

Calcular el área sombreada de la siguiente figura:

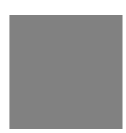


SOLUCIÓN

Empleemos, para auxiliarnos, una *construcción.* Tracemos dos líneas verticales de la siguiente manera:



Si observamos con atención, lo que demarcan las líneas punteadas laterales es un cuadrado. Por otra parte, los semicírculos negros, a la izquierda y a la derecha del cuadrado, tienen la misma área que los semicírculos blancos a los lados de la línea central punteada. Imaginemos que recortamos los semicírculos negros y los colocamos en el sitio que ocupan los blancos.

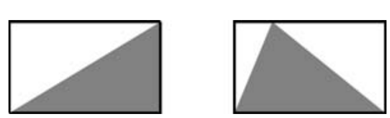


Lo que se tendrá será justamente un cuadrado, de lado a. Por lo tanto el área de la parte sombreada es:

$$A=a^2.$$

✍ EJEMPLO 4

De los dos triángulos siguientes, ¿cuál tiene mayor área? (los rectángulos en los que están inscritos son idénticos en tamaño):



SOLUCIÓN

El área de cualquier triángulo es igual al producto de la base por la altura del rectángulo en el que se halla inscrito, dividido entre dos. Y ya que los rectángulos son iguales, la base y altura serán las mismas en cada caso. Por lo tanto, el área es la misma.

Antes de proponer la siguiente lista de problemas (que más bien deben verse como retos y estímulos al uso del intelecto), recalcaremos que cada problema tiene una naturaleza propia, lo que hace de la matemática un ejercicio de la imaginación mucho más interesante. Aquí citaremos unas palabras de George Pólya,[20] matemático polaco del siglo XIX:

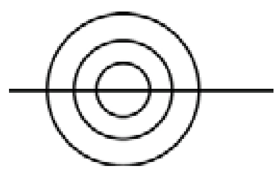
"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de cualquier problema hay una pizca de descubrimiento. Tu problema puede ser modesto; pero si es un reto para tu curiosidad, y hace que entren en juego tus facultades de inventiva, y lo resuelves con tus propios medios, experimentarás la tensión y gozarás el triunfo del descubrimiento".

■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

1. Con seis palillos, construye cuatro triángulos equiláteros de igual tamaño.

2. Con doce palillos, construye seis cuadrados, todos de igual tamaño.

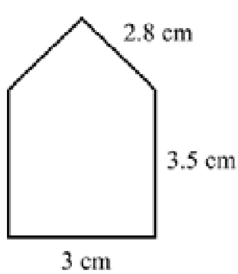
3. ¿Es posible trazar, sin despegar el lápiz, la siguiente figura?



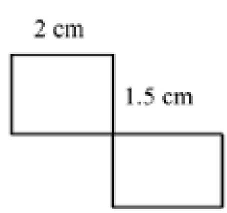
4. Calcula el perímetro de las siguientes figuras, apoyándote de un dibujo para cada inciso:

a) Un cuadrado de lado 8cm.
b) Un rectángulo de lados 6cm y 4cm.
c) Un rombo de lado 12cm.
d) Una circunferencia de diámetro 7m.

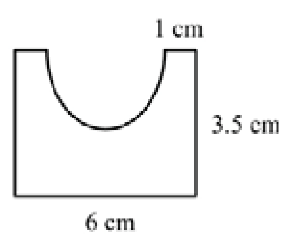
5. Calcula el perímetro de las siguientes 6 figuras:



a)

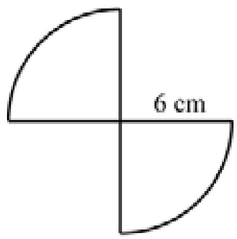


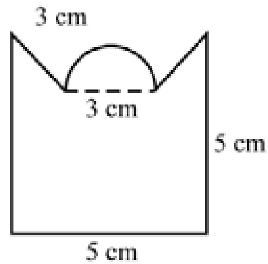
b)

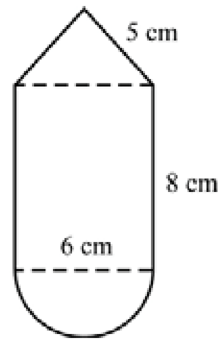


c)

[20] Revisa la Unidad I de este libro y observa la variedad de métodos existentes que propuso G. Pólya para resolver problemas.







d) e) f)

6. Calcula el área de:

a) Un cuadrado de lado 6 cm.

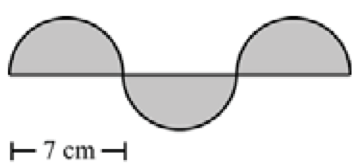
b) Un triángulo de lados 3 cm, 7 cm y 5 cm.

c) Un trapecio de base menor 4 cm, base mayor 10 cm, y altura de 3 cm.

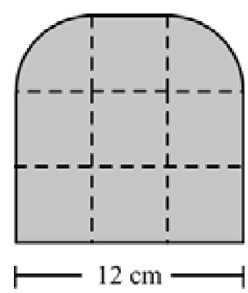
d) Un cuadrilátero de base 5 cm y altura 3.5 cm.

e) Un círculo de diámetro 10 m.

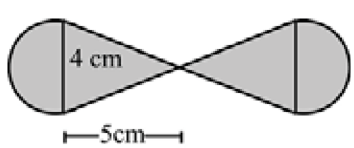
7. Calcula el área de las siguientes 4 figuras:



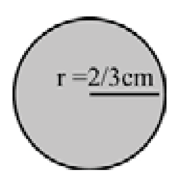
a)



b)



c)



d)

8. Determina la cuarta parte de la superficie de un cuadrado de 9 cm^2. ¿Cuánto mide su lado?

9. Determina la longitud de una circunferencia, si el perímetro del cuadrado que la circunscribe es de 40 cm.

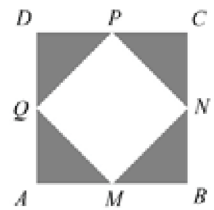
10. El 12.5 % de la cuarta parte del perímetro de un cuadrado es de 2 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

11. Los lados de un rectángulo están en la *razón*[21] 3:8, ¿cuánto mide su lado menor si su área es 600 cm^2 ?

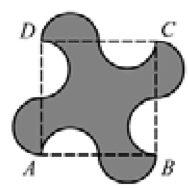
12. Los perímetros de dos cuadrados son 24 cm y 72 cm ¿Cuál es la razón entre sus lados?

13. Calcula las áreas de las regiones sombreadas en las siguientes figuras, explicando de manera clara tus respuestas:

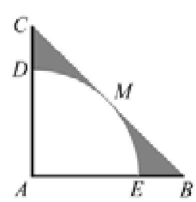
- 1) *ABCD* es un cuadrado, *M, N, P, Q*, son los puntos medios y *BN* = 3 cm.



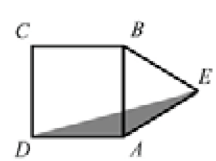
2) *ABCD* es un cuadrado cuyo lado mide 12 m, y las ocho semicircunferencias son iguales.



- 3) *AC* = *AB*, el ángulo formado por el vértice *CAB* es recto y *BC* = 10 cm.

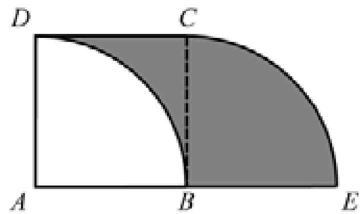


- 4) *ABCD* es un cuadrado de 6 cm de lado y *ABE* es un triángulo equilátero.

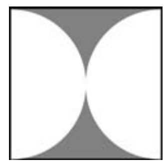


[21] Para revisar esta notación, recurre a la sección 2.5.1: Razones.

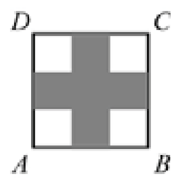
- 5) $ABCD$ es un cuadrado, $AB = BE = 6$ cm y los arcos son de una circunferencia.



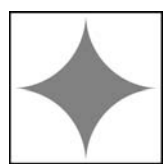
- 6) La figura representa un cuadrado de 24 cm.



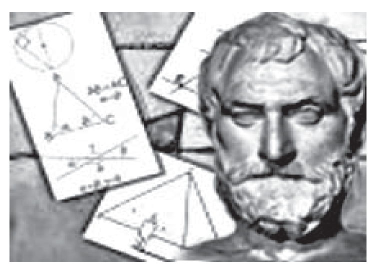
- 7) $ABCD$ es un cuadrado, $BC = 3$ cm y cada lado está dividido en tres partes iguales.



- 8) Cuadrado de lados 2 cm.



Tales de Mileto, *con el único fin de demostrarse lo sencillo que es hacerse rico, acaparó todos los molinos de aceite en un año de excepcional abundancia en la cosecha de aceitunas. Su fin, al enriquecerse, era exclusivamente el de mostrar que empleando adecuadamente el intelecto se puede acumular fortuna. Con el dinero que obtuvo viajó por varios países y recopiló gran parte del conocimiento matemático de su época. Fue él quien introdujo la geometría en Grecia.*



3.3 TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA

Las siguientes secciones son opcionales para el lector. Abarcan los temas de: volumen, poliedros regulares (sólidos platónicos), construcciones a regla y compás, razón áurea y fractales. Estos temas son muy atractivos e interesantes para quienes gustan de la geometría.

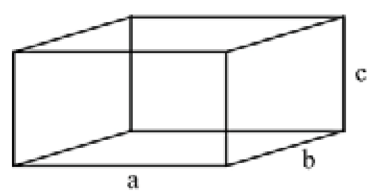
3.3.1 VOLUMEN

Volumen es la medida del espacio ocupado o desalojado por un cuerpo.

Para poder determinar un volumen, necesitamos tres dimensiones. En general, sus unidades de medición son las de longitud al cubo: cm^3, m^3, km^3, $pies^3$, etc.

■ PARALELEPÍPEDOS

Para volúmenes pensemos, antes que nada, en cómo se generan algunos de éstos. Si barremos en una longitud *c* un rectángulo de área *ab* hacia *arriba* o hacia nuestra mirada, se *generará* un cuerpo con volumen, lo que denominamos un paralelepípedo:

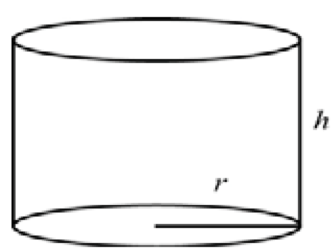


Por analogía a la obtención del área, el volumen de este cuerpo geométrico será base por altura, considerando que la base es en este caso un área (*ab*) y la altura *c*: $V = abc$.

En lugar de perímetro, este paralelepípedo tiene superficie, que es lo que limita al volumen. Otra forma de definir su superficie es mediante la suma de áreas limitantes del cuerpo geométrico. Para nuestro caso tenemos dos tapas de área *ab*, dos de área *bc* y dos de área *ac*. Entonces, la superficie será la suma de esas seis superficies que, después de simplificar, se reduce a: $S = 2(ab+ac+bc)$.

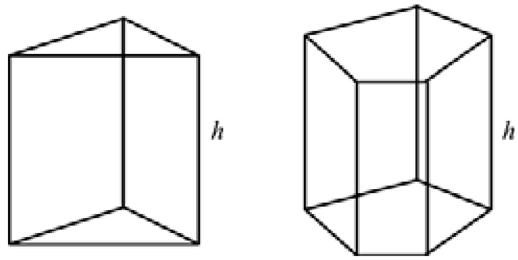
■ CILINDROS

Estamos acostumbrados a pensar que un cilindro es una figura tridimensional del tipo siguiente:



donde la base o sección está dada por un círculo de radio *r*, y tenemos una altura *h*. Esto es verdad; pero en matemáticas también suele considerarse a un cilindro como un cuerpo geométrico de sección constante, sin que necesariamente ésta sea circular.

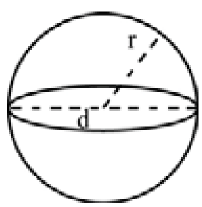
Ejemplos de cilindros también son los siguientes:

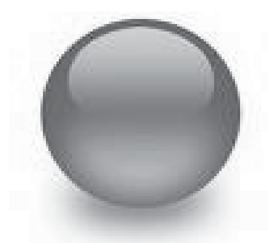


En el primer caso el cilindro tiene sección triangular y en el segundo pentagonal. El volumen de un cilindro de estos tipos es: $V = bh$, donde *b* denota el área de la base y *h* la altura.

■ LA ESFERA

Imaginemos que tenemos un círculo y que lo hacemos rotar sobre un eje horizontal o vertical. Lo que éste generará será una esfera (recuerda lo que se observa cuando haces girar una moneda sobre la superficie de una mesa).





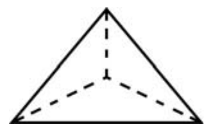
El volumen *V* de la esfera de radio *r* está dado por la fórmula: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

La superficie *S* de la esfera, que puede ser imaginada como un cascarón, está dada por: $S = 4\pi r^2$.

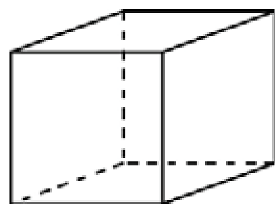
3.3.2 POLIEDROS REGULARES

A los **poliedros regulares** también se les conoce como *sólidos platónicos*. Tomemos un polígono regular. Pensemos en el más simple: el *triángulo equilátero*. Ahora bien, hagámonos la siguiente pregunta: ¿cuántos triángulos equiláteros se requieren para conformar un cuerpo tridimensional de forma regular?

Bien, si tomamos cuatro de ellos, podemos unirlos por las aristas a la perfección y tendremos un **tetraedro:** un poliedro de cuatro lados iguales. Por otro lado, observamos que tiene ***4 vértices, 6 aristas, y 4 caras.*** [22]



Si procedemos de igual manera con el siguiente polígono regular, el *cuadrado*, veremos que la figura tridimensional obtenida es un **cubo**, al juntar adecuadamente seis cuadrados. En este caso, haciendo un conteo, tenemos ***8 vértices, 12 aristas y 6 caras.***



¿Qué ocurriría si tratásemos de hacer lo mismo con el siguiente polígono regular: el hexágono? ¡Oh, sorpresa! Resulta imposible construir un poliedro regular con hexágonos. Los griegos conocían este hecho que los intrigó. Ellos sospechaban que sólo existen *5* poliedros regulares:

Poliedro	***Número de caras***	***Conformado por***
Tetraedro	Cuatro	Triángulos equiláteros
Cubo	Seis	Cuadrados
Octaedro	Ocho	Triángulos equiláteros
Dodecaedro	Doce	Pentágonos
Icosaedro	Veinte	Triángulos equiláteros

Y estaban en lo correcto, aunque no pudieron probarlo. Debemos a Euler[23] la garantía de que, efectivamente, existen sólo cinco poliedros regulares. Para demostrarlo exploró, antes de iniciar su investigación, una propiedad que obedece un poliedro cualquiera (incluso un irregular).

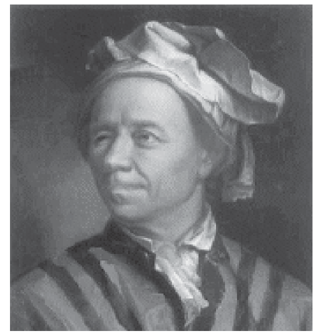
[22] *Cara*: es un lado del poliedro en cuestión, por ejemplo, un cubo tiene seis caras. *Arista*: es el segmento de línea donde confluyen dos caras. *Vértice*: es el punto donde se intersectan las aristas.
[23] Leonhard Euler (1707-1783), ha sido el matemático suizo más prolífico de la historia. Tras su muerte, se inició un ambicioso proyecto para publicar la totalidad de su obra científica, compuesta por más de ochocientos tratados que abarcan infinidad de temas matemáticos, físicos y astronómicos.

Se encontró con una fórmula que relaciona el número de vértices, de aristas y de caras de un poliedro dado. Tal fórmula lleva su nombre, y describe un número llamado el *número de Euler*, al que denotaremos con la letra griega *psi*: ξ. Así, para un polígono, el número ξ está dado por:

$$\xi = V - A + C ,$$

donde V es el número de vértices, A el número de aristas, y C el número de caras.

De nacionalidad suiza, **Leonhard Euler** *(1707-1783) es considerado el matemático más brillante de su época. Entre sus múltiples aportaciones a la ciencia podemos mencionar: origen de la topología; descubrimiento de los números complejos; determinación de la constante que lleva su nombre; notación de conceptos; número imaginario raíz de menos uno; ley de reciprocidad cuadrática; principios básicos de mecánica, óptica, acústica, mecánica de fluidos, mecánica celeste, teoría del movimiento lunar y determinación precisa del centro de las órbitas elípticas planetarias. A pesar de haber quedado ciego, su memoria y capacidad prodigiosas le permitieron legarnos más de ochocientas obras.*



✍ EJEMPLO 5

¿Cuál es el número de Euler, ξ, para un tetraedro?

Veamos: para ese caso, $V = 4$, $A = 6$ y $C = 4$. Por lo tanto, V – A + C = 4 – 6 + 4, por lo que ξ = 2.

✍ EJEMPLO 6

¿Ocurre lo mismo para el cubo?

En efecto, aquí: $V = 8$, $A = 12$ y $C = 6$. Nuevamente el número de Euler, ξ, es 2.

Si se aplica esta fórmula para los demás poliedros regulares, el número ξ sigue siendo *2*. Euler demostró que sin importar el tipo de poliedro que se tome, el número ξ asociado a él siempre será *2,* es decir:

***Teorema*:** Para todo políedro tridimensional ocurre que: $V - A + C = 2$.

Empleando este hecho de manera adecuada y efectuando unos cálculos relativamente simples, Euler pudo demostrar que sólo existen cinco poliedros regulares, conocidos también como *sólidos platónicos*, en homenaje a *Platón*, quien los asoció con la perfección y la belleza.

Como hemos mencionado, y por lo que se muestra arriba, no es posible encontrar un poliedro regular que tenga sólo hexágonos como caras; éstas no se acomodarían, hecho que observó Euler.

Sin embargo, sí es posible manufacturar un poliedro uniendo adecuadamente hexágonos y pentágonos. Una de las primeras personas en conseguirlo fue el brillante arquitecto estadunidense *Buckminster Fuller*, a mediados del siglo XX. Tal poliedro se encuentra en algunas estructuras cristalinas a nivel molecular y, en honor a este geómetra lleva el nombre de *fulereno*.

No obstante, sabemos que también el matemático griego Teteto y, después, el pintor e inventor italiano Leonardo da Vinci, habían encontrado este poliedro.

Si tomamos un balón de fútbol y lo observamos con cuidado, veremos que está constituido justo por hexágonos y pentágonos, unidos mediante costuras. Al *inflar* un fulereno conseguimos un balón de fútbol. ¡Por otra parte, resulta sorprendente que el número de caras, vértices y aristas del fulereno satisfacen también la relación de Euler, y el número ξ sigue siendo 2!

Aplicación de la geometría:
Fulereno, *poliedro casi regular*
formado por hexágonos y pentágonos.
También es conocido como icosaedro truncado.

3.3.3 RAZÓN ÁUREA: LA FRONTERA ENTRE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

En la primera unidad de este libro conocimos la secuencia de números conocida como la secuencia o sucesión de Fibonacci. Los primeros términos de esta secuencia son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...$$

Si consideramos los cocientes de los números sucesivos de Fibonacci, surge un patrón:

1/1 =	1	13/8 =	1.63	233/144 =	1.61805...
2/1 =	2	21/13 =	1.61538...	377/233 =	1.61802...
3/2 =	1.5	34/21 =	1.61904...	610/377 =	1.61803...
5/3 =	1.6666...	89/55 =	1.61818...	...	...
8/5 =	1.6	144/89 =	1.61797...	...	...

Al parecer, los cocientes se aproximan a un número determinado, cercano a *1.618033...* Este es verdaderamente el caso. Conforme más avanzamos en la secuencia de cocientes, estos números se van aproximando a un número especial, una proporción, llamada ***número áureo***[24], o de oro, denotado por la letra griega: $\boldsymbol{\Phi}$.

¿Qué tiene de especial este número? ¿Por qué no es como los demás? Del mismo modo que $\boldsymbol{\pi}$ se relaciona con la figura geométrica más perfecta —el círculo—, el número áureo Φ es el número de la belleza. A continuación veremos por qué.

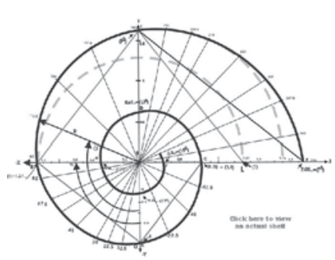
El número Φ pertenece al conjunto de los números irracionales, esto es, los que no pueden expresarse como cociente de dos números enteros. Por ejemplo, recordemos que el número $\sqrt{2}$ es irracional. Podemos computar al número Φ con una calculadora, siguiendo las instrucciones dadas a continuación:

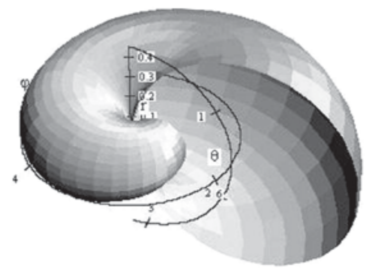
Calculamos la raíz cuadrada de *5*, le sumamos *1*, y dividimos el resultado entre *2*. Por tanto, la fórmula para obtener el número áureo es:

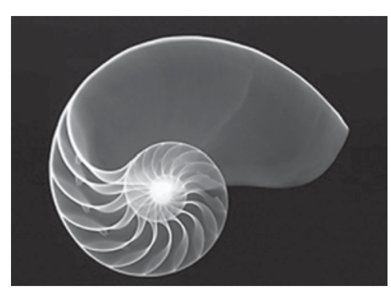
$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Matemáticamente hablando, podemos definir el número áureo como aquel al que si le sumamos uno, equivale a elevarlo al cuadrado: $x+1=x^2$.

Hasta aquí todo puede parecernos aritmética. Sin embargo, lo verdaderamente misterioso y fascinante es que este número aparece en el arte: en la arquitectura, la pintura y la música; en la naturaleza: en la distribución de las hojas en un tallo, en la formación de los caracoles como el ***nautillus*** (ver imágenes), y aún en el cuerpo humano.







[24] En latín se le llamó el *áurea sectio* es decir, sección áurea, o proporción áurea.

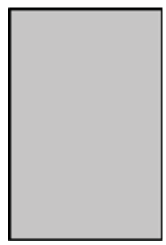
Un dato de interés es que las tarjetas de crédito y las credenciales de identificación están elaboradas según este número: si se mide el largo y se divide entre el ancho, se tiene el número Φ, por lo que guardan una proporción armoniosa y, sin exagerar, podemos decir que sus proporciones son bellas.

■ RECTÁNGULOS ÁUREOS

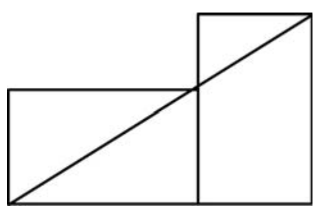
Un rectángulo áureo es un rectángulo tal que su largo y su ancho guardan una proporción áurea. Así, si a es el largo y b denota la altura, se tendrá:

$$\Phi = \frac{a}{b}.$$

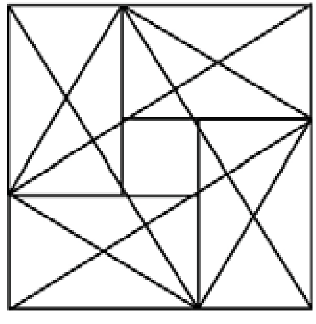
Una buena aproximación a un rectángulo áureo, es la hoja tamaño oficio, que conoces muy bien. Ésta mide 21 cm de base por 34 cm de altura. Si divides el lado mayor entre el menor obtendrás 1.619... , cifra muy aproximada al número áureo. Más adelante veremos cómo construir un verdadero rectángulo áureo, sin aproximaciones como el anterior, empleando regla y compás.



Una de las propiedades de los rectángulos áureos más sorprendente y fascinante es la de que, si se toman dos de ellos y se colocan juntos, uno de manera horizontal y el otro en forma vertical, existe una recta que une a tres de sus vértices. Ésto sólo ocurre para rectángulos áureos, y ningún otro rectángulo cumple tal propiedad:



Uniendo cuatro rectángulos áureos, y empleando la propiedad anterior, podemos encontrarnos con figuras muy bellas, que poseen elementos de simetría interesantes y que nos hacen sospechar que, en efecto, entre el número Φ y el arte existe una íntima conexión:



3.3.4 CONSTRUCCIONES A REGLA Y COMPÁS

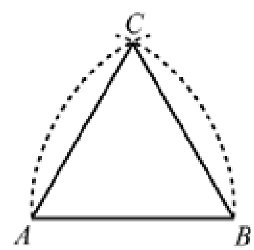
La regla y el compás son conocidos como las herramientas *euclidianas*. En la obra *Los Elementos*, compilada por Euclides, se nos muestra el alcance de estos dos instrumentos para trazar figuras y conocer propiedades de los objetos geométricos.

La regla euclidiana es como la que conocemos, pero sin escala de ninguna especie. El compás de los griegos era distinto al nuestro, pero entre el que ellos emplearon y el nuestro no existe diferencia en los resultados; así que el compás actual puede ser considerado una herramienta euclidiana. Revisemos algunos ejemplos de cómo construir figuras geométricas utilizando regla y compás.

🛠 ACTIVIDAD 17

Para construir a regla y compás un **triángulo equilátero**, procedamos como sigue:

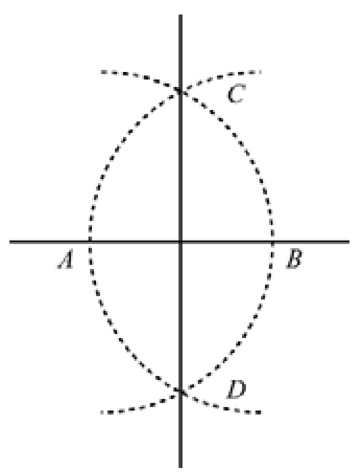
Tracemos un segmento AB de longitud arbitraria. Abramos el compás de modo que abarque tal segmento. Desde el punto A y luego desde el punto B trazar arcos de circunferencia que se intersecten en un punto C. Al unir los puntos A, B y C, tendremos un triángulo equilátero.



🛠 ACTIVIDAD 18

Dada una recta, construir a regla y compás una **recta perpendicular** a ésta.

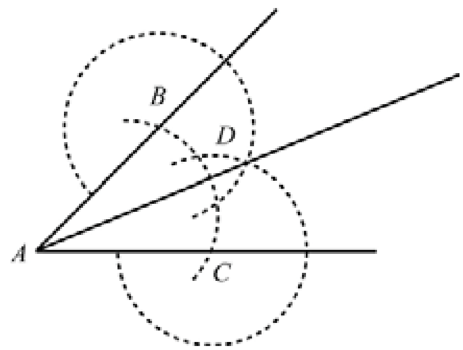
Elijamos dos puntos A y B en la recta. Abramos el compás de modo que abarque la longitud del segmento AB. Tomando como referencia el punto A y posteriormente el B tracemos arcos de circunferencia que se intersecten en los puntos C y D. La recta que pasa por los puntos C y D es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B.



🛠 ACTIVIDAD 19

Cómo **bisectar un ángulo** a regla y compás:

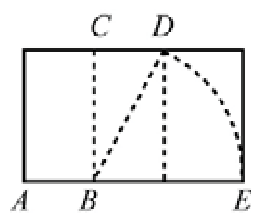
Desde el vértice *A* del ángulo trácese un arco de circunferencia de radio arbitrario que pase por los puntos *B* y *C*. Tomando cada uno de estos nuevos puntos como referencia, trácense dos arcos de circunferencia, respectivamente que se intersectarán dentro del ángulo, en un punto *D*. La recta que pasa por los puntos *A* y *D*, bisecta al ángulo dado.



🛠 ACTIVIDAD 20

En la sección anterior hablamos de la proporción áurea. Veamos cómo construir, a regla y compás, un **rectángulo áureo**, es decir, cuyos lados (base y altura) tengan una proporción áurea:

Tomemos un cuadrado cualquiera. Encontremos, mediante arcos del compás, el centro *C* y *B* de cada lado horizontal del cuadrado, y tracemos con la regla un segmento vertical que divida al cuadrado en dos partes iguales, yendo del punto *B* al punto *C*. Con la regla, únase la parte media *B* de la base, con el vértice superior derecho *D*, mediante una diagonal. Ábrase el compás de modo que abarque tal diagonal y trácese una curva hacia abajo como se indica en la figura, con la punta del compás en el punto *B*. Tomando como base el segmento *AE* y como altura un segmento de longitud *BC*, tendremos un rectángulo áureo perfecto.



■ SECCIÓN DE EJERCICIOS

Ahora que has experimentado la lógica y el funcionamiento de estas herramientas, intenta resolver las siguientes actividades de manera individual. Al finalizar, o si tienes dudas, comparte los resultados con tus compañeros o tu profesor.

14. Construir un cuadrado regular a regla y compás.

15. Construir un hexágono regular a regla y compás.

16. Intentar encontrar la manera de trazar un pentágono regular a regla y compás (este ejercicio requiere mucha inventiva, pero constituye un excelente reto para quien lo intente).

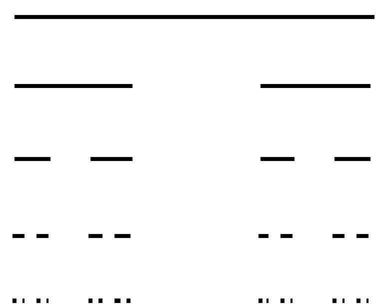
17. Haciendo uso adecuado de todo lo expuesto, trisectar un ángulo de *90* grados.

18. ¿Será posible trisectar un ángulo de *60* grados? ¿Y, en general, un ángulo cualquiera? Si lo consideras necesario, pregunta a tu profesor.

3.3.5 FRACTALES

A últimas fechas la geometría ha dado un giro impresionante, luego de que los matemáticos han hecho algunos descubrimientos que al principio los desconcertaron. El alemán George Cantor, quizá el mátematico más original de todos los tiempos introdujo, sin proponérselo, el concepto de **fractal**.

Cantor hizo lo siguiente: tomó un segmento de recta, lo dividió en tres partes iguales y retiró la de enmedio. A continuación, repitió el procedimiento con cada uno de los segmentos restantes. Después hizo lo mismo con los que fueron quedando, éstos cada vez más pequeños, y así sucesivamente. Las figuras resultantes fueron las siguientes.



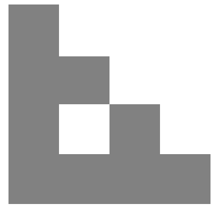
Cantor imaginó lo que ocurriría si continuaba este procedimiento hasta el infinito y, para sorpresa suya, eso que parecían puntos que se esfumarían en la nada, continuaba existiendo, y no era el conjunto vacío. Había una sorpresa más: cada subconjunto de puntos era similar a cualquiera que se eligiera, sin importar el tamaño. Por ejemplo, en el tercer paso de la figura hay dos conjuntos que son idénticos al de la figura anterior (la del paso 2); sólo que más pequeñas. Esto se conoce como *autosimilaridad*, y es propio de los conjuntos conocidos como **fractales**.

Pero faltaba un resultado igual de sorprendente: la dimensión de este conjunto descubierto por Cantor (llamado *Polvo de Cantor* en su honor), era no entera. Al inicio de este tema decíamos que la dimensión de la recta o de un segmento de recta es uno y la dimensión de un punto es cero. Pues bien, la dimensión del *Polvo de Cantor* no es ni cero ni uno, sino que se encuentra en un punto intermedio, por lo que se dice que es *fraccionaria*: de ahí viene el nombre de fractal.

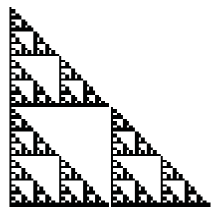
Muchos fractales nos ayudan a ejercitar nuestra intuición o nuestro pensamiento inductivo. Pero, además, algo que caracteriza a los fractales es que son objetos matemáticos de gran belleza. A continuación mostraremos cómo construir algunos otros fractales de dimensión fraccionaria entre uno y dos, que son aún más interesantes que el *Polvo de Cantor*.

Empecemos con uno muy conocido, denominado el *Triángulo de Sierpinski*, debido al matemático polaco *Sierpinski*. Hay que tomar un cuadrado del tamaño que se desee, después dividirlo en cuatro cuadrados iguales y retirar el superior derecho, como se muestra abajo, donde la segunda figura se obtiene de la primera:

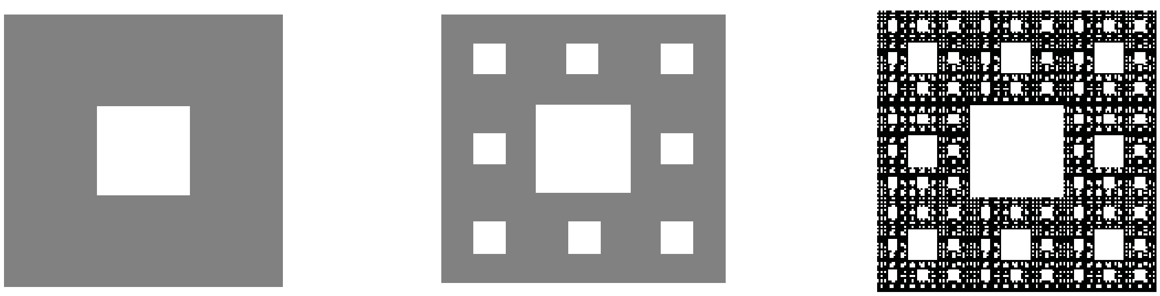
A continuación, cada uno de los tres cuadrados restantes se divide nuevamente en cuatro, y de nuevo se retira el superior derecho, justo como el procedimiento anterior. La figura resultante es la siguiente:



Si siguiésemos este proceso iterativamente muchas veces más (incluso podríamos imaginar que lo hacemos hasta el infinito), el fractal resultante tendría la forma que se muestra. Sierpinski se hizo famoso por descubrir este fractal:

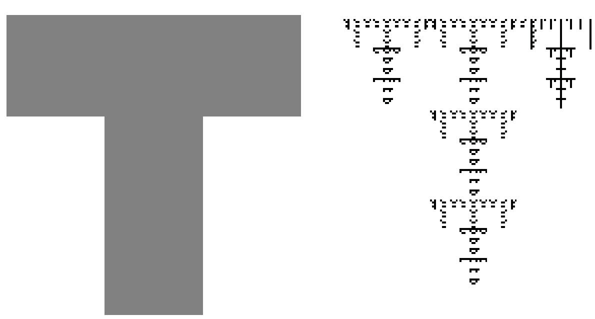


Otro fractal, también atribuido al matemático polaco, y conocido como la *Esponja de Sierpinski*, se construye así: Tómese un cuadrado, divídase en 9 partes iguales y quítese justo la del centro, como se muestra en la figura de la izquierda. Después, a cada uno de los 8 cuadrados restantes repítaseles el procedimento enunciado, quedando los arreglos de la figura que aparece en el centro. Si se continúa el proceso hasta infinito tendremos un fractal como el de la extrema derecha:

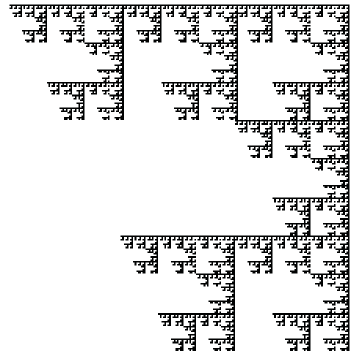


Hay muchos fractales que pueden construirse, incluso tú puedes descubrir algunos interesantes dibujando en hojas de cuadrícula los arreglos que se van obteniendo. Daremos algunos ejemplos más de fractales, en los que se indicará la partición, y el fractal resultante, tú puedes deducir fácilmente lo que se hizo y seguir los pasos, como en los casos anteriores.

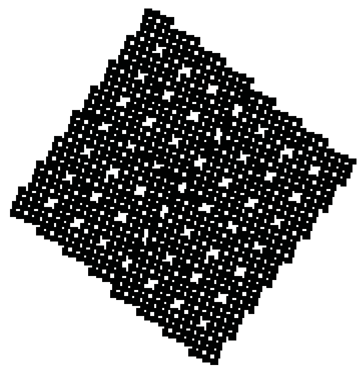
De una cuadrícula con 9 partes iguales, retírense 4, quedando una T como se muestra abajo. Después del proceso, el resultado es una *T fractal*:



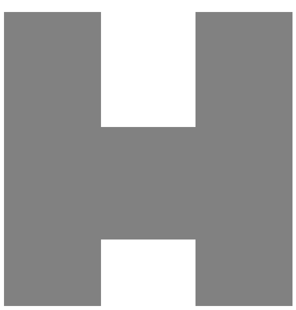
Ahora, de una cuadrícula con 9 partes, retírense 3, de modo que quede la figura de abajo. Al final del proceso se obtendrá una figura similar a la de la derecha:

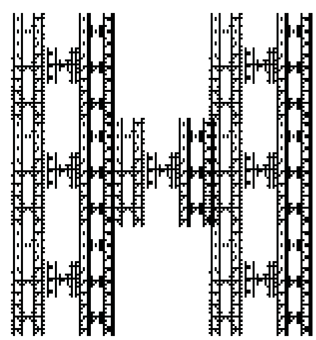


A continuación, de un arreglo como el de la izquierda, después de iterar, se obtiene un *tapete fractal*. (La retícula inical es de 25 cuadrados iguales, de los que se sustraen 9).



De una H, que resulta quitando 2 secciones de una cuadrícula de nueve, obtenemos una *H fractal*:





Del arreglo que se tiene al retirar 1 sección de una cuadrícula de 6, e iterando al infinito, se obtiene una *mezquita fractal*:

■ FUENTES

■ TEXTOS DE REFERENCIA Y BIBLIOGRAFÍA

- Baldor, A. *Aritmética*. México: Patria Cultural, 2001.
- Bell, E. T. *Historia de las Matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica, 2000.
- Cole, K. *El Universo y la taza de té: las Matemáticas de la verdad y la belleza*. Barcelona: Editorial B, 2003.
- Gardner, Martin. *Festival mágico-matemático*. Madrid: Editorial Alianza, 2000.
- Klein, Morris. *Matemáticas para estudiantes de Humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica, 1998.
- Landaverde, J. *Curso de Geometría*. México: Editorial Progreso, 2000.
- Luque Luna, Alberto. *Elementos de Geometría Euclidiana*. México: Limusa, 1995.
- Miller, Charles, *et al*. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. México: Pearson, 1993.
- Mothner, Ira. *Mathematical People*. Boston: Birkhauser Boston, 1985.
- Piaget, J., and Szeminska, A. *The Child's conception of geometry*. EUA: Prentice Hall, 1987.
- Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa*. Barcelona: Ed. Roca, 1990.
- Pólya, George. *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press, 1973.
- Sagan, Carl. *Miles de millones*. Barcelona: Ediciones B, 2003.
- Stewart, Ian. *De aquí al infinito*. Barcelona: Ed. Crítica, 2002.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. Argentina: Ed. Pluma y Papel, 2002.
- Thompson, A. *Geometría al alcance de todos*. México: Editorial UTHEA, 2005.

■ SITIOS WEB DE CONSULTA

- http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/telsec/curso1/htmlb/sec_46.html
- http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/ayudas/magnitudes/magnitudes_proporcionales.htm#SIMPLEINVERSA
- http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/
- http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/algebra1.htm
- http://sss.sectormatematica.cl/comercial/tantoporciento.html
- http://www-etsi2.ugr.es/profesores/jmaroza/anecdotario/anecdotario.htm
- http://www.amejor.com/mates/bloques/todosproblemas/del_251_al_final.htm
- http://www.geocities.com/Athens/Acropolis/4329/cumat.htm
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/numeros/fracciones/fracciones.htm
- http://www.librys.com/tantoporciento
- http://www.maristas.com.ar/champagnat/poli/mate.htm
- http://www.sabiasque.info/matematicas.htm
- http://www.sectormatematica.cl/comercial/tantoporciento.htm
- http://www.terra.es/personal/ijic0000/tangram.htm
- http://www.vanguardiaeducativa.com/contenidos-biblioteca/contenidos%20matematica.htm
- http://www.xtec.es/~fgonzal2/curio_irrac.html
- http://www20.brinkster.com/fmartinez/aritmetica7.htm

Esta obra se terminó de imprimir
en el mes de agosto de 2009
en el taller de impresión de la
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
con un tiraje de 3500 ejemplares.

PRINCIPIA

Principia **es un libro dirigido, en general, a todo aquel que le interese adentrarse en la matemática a un nivel básico universitario, y especialmente a los estudiantes de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México que cursan el módulo inicial del Programa de Integración.**

La propuesta metodológica se basa en la comprensión de los principios matemáticos como elementos esenciales para el entendimiento de un universo tan maravilloso como vasto. Privilegia, antes que el conocimiento, el pensamiento y la imaginación; el uso creativo de la razón.

Siguiendo la filosofía del matemático Pólya, quien habla de la "excitación del descubrimiento", *Principia* **se estructura bajo la consigna de aprender por medio del razonamiento y la resolución de problemas. Cada sección, tanto la de aritmética como la de geometría, y en particular la de razonamiento inductivo, incluyen ejercicios y notas históricas amenas que permiten que el lector perciba la génesis de algunos tópicos matemáticos.**

Introducir al lector en este mundo y despojarlo de sus miedos, ayudarlo a comprender lo que ocurre de manera natural y sumergirlo en su goce y disfrute son los propósitos fundamentales de esta obra.