

ESTUDIO DE UN MODELO PARA RESOLVER PROBLEMAS

COMENTARIO PREVIO:

El objetivo de este trabajo es desarrollar estrategias de resolución de problemas con vista a ser aplicadas a cualquier situación problemática del conocimiento.

Se dará luego a conocer un listado de sugerencias prácticas para resolver problemas, que en adelante llamaremos "PRINCIPIOS".

La aplicación de éstos no debe ser considerada como una simple mecánica de aplicación, sino más bien una interacción continua y dialéctica entre **INFORMACIÓN, ELEMENTOS DESCONOCIDOS Y MODELO TEÓRICO EMPLEADO**.

Será este proceso el que nos dará luz acerca del o de los caminos posibles de resolución y la elección del camino óptimo.

Serán los usuarios de estas estrategias los que al final descubrirán los vacíos y superarán las deficiencias que éstas tienen, elaborando de esta manera una herramienta más poderosa.

Estas sugerencias han sido extraídas de una observación atenta de cómo usualmente se procede en la resolución de una situación problemática de la Física o de la Matemática.

Sin embargo, cabe insistir, en que éstas, representan una generalización y síntesis útil y aplicable también a otras disciplinas cuya conformación sea semejante a la Física o la Matemática, esto es: un modelo teórico conformado por Principios, leyes experimentales, definiciones, etc.

Establecemos los siguientes supuestos:

1.- NO HAY UN CAMINO ÚNICO PARA RESOLVER UN PROBLEMA:

Un mismo problema puede ser resuelto de diversas maneras, derivadas éstas de enfoques diferentes, o bien como resultado de la combinación de caminos diversos.

2- TODA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA SE PUEDE DIVIDIR EN TRES CONJUNTOS DE ELEMENTOS:

- Conjunto de Datos o Información.
- Conjunto de Elementos desconocidos o incógnitas.
- Conjunto de Principios del Modelo Teórico aplicable.

3.- ETAPA DE FAMILIARIZACION:

Es necesario familiarizarse con la mayor cantidad posible de elementos que conforman la Situación Problemática en estudio:

¿Qué es lo conocido : Datos - Información ?

¿Qué es lo desconocido: valor de una variable, relación entre variables, etc. ?

¿Qué modelos teóricos son susceptibles de aplicar: listado de principios, reglas, definiciones, teoremas del modelo, simbología empleada, nomenclatura, códigos que emplea el modelo teórico elegido.

4.- **SUB-DIVISIÓN DE LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA EN UNIDADES MÁS SIMPLES:**

Mientras sea posible, conviene realizar una sub - división del problema de acuerdo a alguna pauta o criterios; como por ejemplo:

- aspectos comunes.
- situaciones reconocibles como problemas ya resueltos.
- relaciones funcionales.
- semejanzas y analogías.
- ¿ ?

5.- **ASIGNAR NOMBRES A LOS ELEMENTOS(VARIABLES) QUE CONFORMAN EL PROBLEMA:**

La asignación de nombres a los términos que intervienen en el problema en estudio (sean desconocidos o no) permite lograr una economía de pensamiento, permitiendo un manejo más sencillo de las variables en juego, y una ganancia en términos de generalidad.

Normalmente conviene utilizar las iniciales y sub - índices.

6.- **ESQUEMATIZAR LA RESOLUCION DEL PROBLEMA MEDIANTE UN GRAFO**

(DIAGRAMA DE BLOQUES);indicando en el interior de cada bloque el tipo de tarea a realizar, sin importar ni preocupar en un comienzo cómo se realizará dicha tarea o el procedimiento que se empleará para concretar la tarea consignada en cada bloque, porque cada uno de éstos dará probablemente origen a otros diagramas de bloque.

7.- **EL ORDEN DE RESOLUCIÓN SE INDICARÁ MEDIANTE FLECHAS QUE UNEN LOS BLOQUES CONSIDERADOS.(CONVENCIÓN)**

8.- **DIAGRAMA DE RELACIONES:**

Ayuda en el análisis del problema la confección de un grafo en el cual aparezcan relacionados los **PRINCIPIOS DEL MODELO APLICABLE** y los **ELEMENTOS DESCONOCIDOS**

siguiendo la siguiente convención:

- Cada elemento desconocido se encierra en un óvalo y cada principio en un rectángulo.
- se une con una línea cada elemento desconocido con el principio teórico que se relaciona con él.

9.- SE PUEDE DAR COMIENZO EL ANALISIS DEL PROBLEMA O EL DIAGRAMA DE RELACIONES, POR CUALQUIERA DE LOS ELEMENTOS DESCONOCIDOS DETECTADOS.

NOTA BENE: Normalmente en la resolución de un problema aparecen elementos desconocidos no considerados, por cuya determinación o evaluación numérica se hace necesario pasar para determinar los elementos desconocidos considerados.

10.-CONSTRUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE RELACIONES:

El D.R. se va construyendo hacia abajo y hacia los lados (no imprescindible) a partir de un elemento desconocido cualquiera, llegando a **PUNTOS TERMINALES**, que definimos como aquellos en los cuales ya no es posible aplicar nuevos **PRINCIPIOS TEÓRICOS**.

11.- UN PUNTO LLEGA A SER PUNTO TERMINAL :

Si en la relación que describe el principio teórico de n - variables hay $n-1$ variables cuyos valores están presentes en el conjunto de datos.

Ejemplo:

Si $A = p q + r$ describe un principio teórico, diremos que la relación de 4 variables : $\{ A, p, q, r \}$ está determinada (resuelta.) si son conocidos los valores de por lo menos $4 - 1 = 3$ de ellas, pudiendo ser cualquiera de las combinaciones posibles; por ejemplo:

A	p	q
A	p	r
A	q	r
p	q	r

12.- MÁS DE UN CAMINO DE RESOLUCIÓN:

En el D.R se puede observar más de un camino de resolución, siendo aconsejable seguir los caminos más cortos o simples, situación ésta que se corresponde con la menor cantidad de principios necesarios para resolver el problema.

13.- UN CAMINO PUEDE DERIVAR EN DOS O MAS DIRECCIONES ANTES DE LLEGAR A UN PUNTO TERMINAL.

14.- PUEDE HABER MAS DE UN PUNTO TERMINAL EN EL DIAGRAMA DE RELACIONES Y PUEDE OCURRIR QUE ÉSTOS ESTÉN A SU VEZ RELACIONADOS ENTRE SÍ.

15.- CADA PUNTO TERMINAL DEL D.R. SE TRANSFORMA LUEGO EN UN PUNTO INICIAL DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA ORIGEN.

16.- SI EN EL D.R. APARECEN CAMINOS CERRADOS:

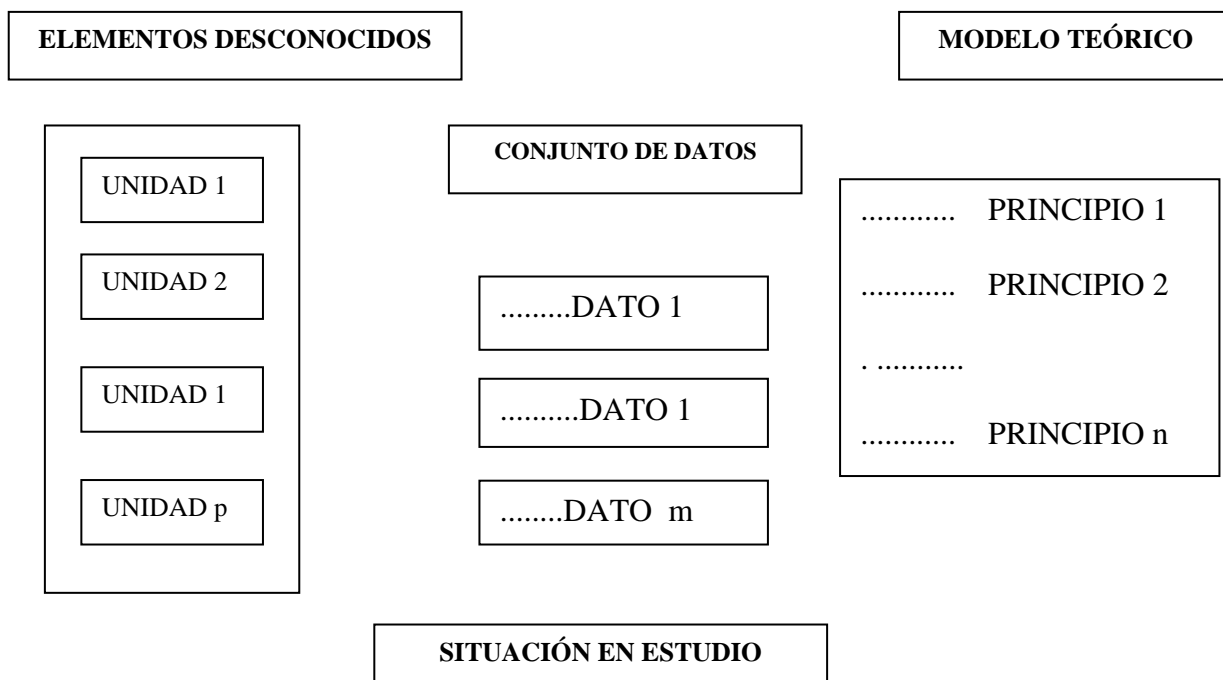
Esta situación implica la resolución de sistemas de ecuaciones, si el número de elementos desconocidos es mayor que el número de principios aplicados, el problema no se puede resolver por falta de datos(en el sentido de que no hay una solución numérica concreta), o en general se puede decir que hay infinitas soluciones. Así por ejemplo el sistema de ecuaciones siguiente tiene infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x - 4y &= 6 \end{aligned}, \text{ Solution is: } \left[x = \frac{22}{5} - \frac{4}{5}z, y = -\frac{1}{5}z - \frac{2}{5} \right]$$

Como se puede observar , este sistema tiene infinitas soluciones, y en este caso, se presentan las indeterminadas x e y como dependientes del valor de z.

17.- CONSTRUCCIÓN DEL D.R. :

El D.R. se va conformando por la sucesiva contrastación de cada unidad simple(elemento desconocido) con cada uno de los principios del modelo teórico y el conjunto de datos. De acuerdo al esquema:



Luego se vuelve a empezar este proceso con la Unidad 2 y así sucesivamente hasta llegar a la k - ésima Unidad.

18.- CADA ELEMENTO DESCONOCIDO, POR LA APLICACION DE UN PRINCIPIO ORIGINA A SU VEZ, OTROS PROBLEMAS UNIDADES, QUE A SU VEZ DEBEN SER RELACIONADOS CON OTROS PRINCIPIOS DEL MOD. TEÓRICO, HASTA LLEGAR A LOS PUNTOS TERMINALES

19.- MODIFICACIÓN DE LA DISPOSICIÓN DE LOS ELEMENTOS QUE CONFORMAN EL PROBLEMA:

Los elementos o unidades simples en que se puede sub - dividir el problema es conveniente en ocasiones re - agruparlos de una manera diferente, de tal manera que se pueda conformar una situación equivalente que constituya una situación problemática más simple, o bien reconocida como una situación ya resuelta.

Además cada problema unidad puede ser resuelta en forma separada obteniendo resultados o conclusiones parciales que luego deben ser reestructuradas para conformar la solución del problema origen.

20.- FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DESDE OTRO PUNTO DE VISTA:

Si ninguno de los PRINCIPIOS TEÓRICOS del modelo o formulaciones del problema tiene éxito para la resolución del problema, es conveniente FORMULAR el problema desde otro punto de vista:

SI SE TRATA DE UN PROBLEMA GENERAL: en el cual entran en juego muchas variables, disminuir en el problema las variables, haciendo constantes algunas de ellas, o bien particularizando el problema, dándole valores numéricos a las variables, para observar el "funcionamiento", o la forma cómo operan.

¿QUE PASA SI... ? : Esta pregunta nos permite hacer variaciones del problema, cambiando por ejemplo las condiciones en que el **PROBLEMA-PROCESO** en estudio se realiza y de este modo avanzar en su análisis.

ANALIZAR CASOS CONCRETOS : Haciendo un desarrollo completo de éstos, observando :

- Condiciones en que se realiza.
- Rango de validez, alcance.
- Casos especiales, de excepción, o que "contradican la regla", o casos límites.
- ¿¿¿.....???

21.- NOTA BENE:

Es conveniente no asombrarse, cuando en la resolución de un problema, aparezcan **ELEMENTOS DESCONOCIDOS QUE NO SE HABIAN TOMADO EN CUENTA**, o bien se haga necesario o sea más conveniente la aplicación de principios que en un comienzo no se habían considerado (por desconocimiento, por carencia de información completa o bien por simple distracción).

A MODO DE ILUSTRACIÓN SE PRESENTARÁN ALGUNOS EJEMPLOS DEL "MODUS OPERANDI" DE ESTOS PRINCIPIOS EN SITUACIONES CONCRETAS.

Nota Bene: EN CADA EJEMPLO, SE PRETENDE EXPLICAR EL MÉTODO Y NO LAS MATERIAS EMPLEADAS PARA ILUSTRAR SU APLICACIÓN.

PRIMER EJEMPLO :

Primer Problema:

“Calcular la distancia recorrida por un objeto al cabo de 5 segundos si parte del reposo con una aceleración de 2 m/s^2 .”

“ASIGNAMOS NOMBRES A LAS VARIABLES QUE INTERVIENEN”

t : tiempo ; d : distancia ; v_i : rapidez inicial ; a: aceleración

“ O BIEN SE EMPLEA LA NOMENCLATURA QUE ESTÁ MÁS EN USO, O LA MÁS FRECUENTE, SEGÚN CONVENCIONES ESTABLECIDAS”

“ EN CASO DE NO EXISTIR SIMBOLOGÍA APROPIADA EN USO, QUIEN RESUELVE EL PROBLEMA, LA DEFINE”

“ESCRIBIR LISTADO DE DATOS / ELEMENTOS DESCONOCIDOS / PRINCIPIOS DEL MODELO TEÓRICO”

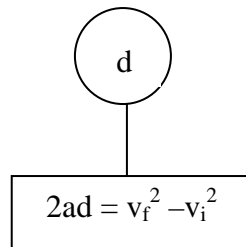
DATOS	ELEMENTOS DESCONOCIDOS	MOD.TEÓRICO.
	d	$v_m = (v_i + v_f) / 2$
t = 5 s		$2ad = v_f^2 - v_i^2$
a = 2 m/s^2		$v_m = d / t$
$v_i = 0 \text{ m/s}$		
		$v_f = v_i + a \cdot t$
		$d = v_i \cdot t + (1/2)a \cdot t^2$

Al escribir el listado de Principios aparecen otros símbolos que corresponden a variables no consideradas en un comienzo:

v_m : velocidad media / v_f : velocidad final

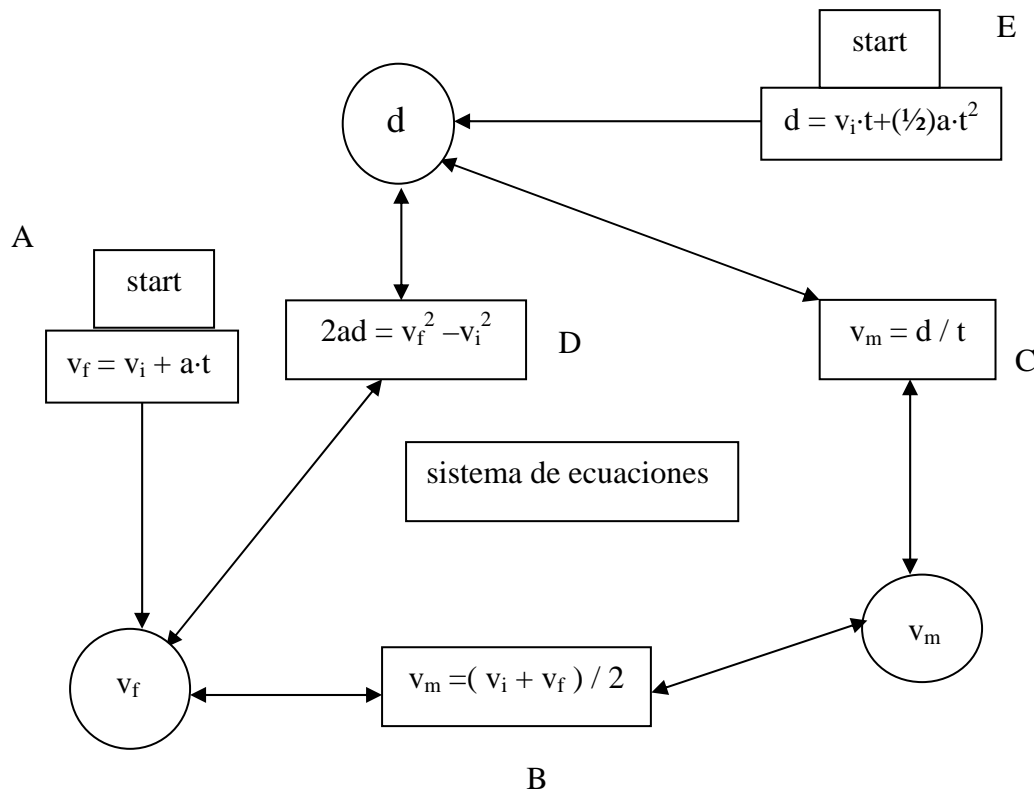
“ Se comienza el diagrama de relaciones (tentativo) a partir del único elemento desconocido aparente, como se ha dicho en un problema puede haber más de un elemento desconocido ”

“Se procede a ‘buscar’ (proceso de contractación)en el conjunto de principios, una relación que contenga la variable: “ d ”



“esta relación origina otros problemas unidades o elementos desconocidos”

“ si estos elementos son o nó desconocidos, se determina por el proceso de contractación con el conjunto de datos ”



Se observa que :

1. Hay dos puntos de inicio o de partida, a saber : A y E
2. Caminos posibles:

Primer camino.	Fórmula empleada				
Secuencia de resolución.	A	→	B	→	C
Lo que calculamos	v_F		v_m		d

Segundo camino.	Fórmula empleada				
Secuencia de resolución.	A	→	D	→	C
Lo que calculamos	v_F		d		v_m

Tercer camino.	Fórmula empleada				
Secuencia de resolución.	E	→	D	→	B
Lo que calculamos	d		v_F		v_m

Cuarto camino.	Fórmula empleada				
Secuencia de resolución.	E	→	C	→	B
Lo que calculamos	d		v_m		v_F

Nota bene: Como se puede observar este análisis nos ha permitido visualizar en forma general la resolución del problema, pudiendo determinar varios caminos para resolverlo, llegando a un punto en que podemos elegir el camino óptimo. En este problema, en particular, tal vez no se pueda apreciar, pero sí en problemas de índole más compleja.

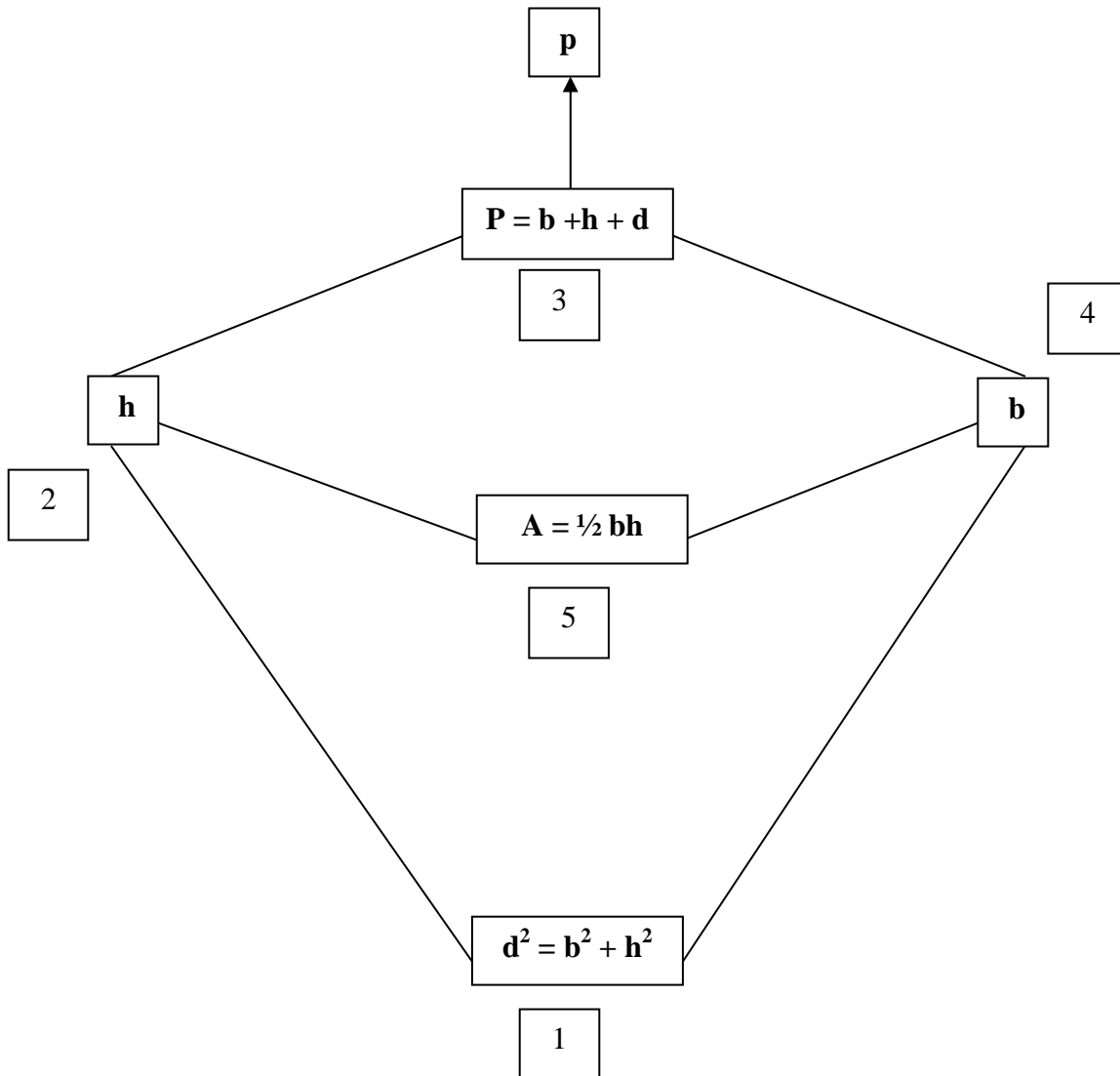
EJERCICIOS:

- 1.- Con los datos siguientes : d; v_f ; t . Dibujar diagrama de relaciones para hallar v_i ; v_m ; a. Determinar los puntos de partida, y todos los caminos posibles, y escribirlos como en el ejercicio resuelto anterior.
- 2.- Con los datos siguientes : d; v_f ; a . Dibujar diagrama de relaciones para hallar v_i ; v_m ; t. Determinar los puntos de partida, y todos los caminos posibles, y escribirlos como en el ejercicio resuelto anterior.

3.- Con acuerdo al siguiente **Modelo Teórico**:

$$A = \frac{1}{2}bh \quad ; \quad d^2 = b^2 + h^2 \quad ; \quad P = b + h + d$$

Y para el conjunto de datos: {A,d} determinar y calcular los elementos del conjunto: {b,h,P}
 Tomar los siguientes valores: A = 6 cm² ; d= 5 cm.



Con los datos dados: se tendrá :

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{1}{2} bh \Rightarrow bh = 12 \Rightarrow 2bh = 24 \quad (1) \\ 5^2 &= b^2 + h^2 \Rightarrow b^2 + h^2 = 25 \quad (2) \end{aligned}$$

Y sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{aligned} b^2 + 2bh + h^2 &= 25 + 24 \Rightarrow \\ (b+h)^2 &= 49 \Rightarrow \end{aligned}$$

$b+h=7 \Rightarrow h=7-b$ se puede sustituir en (1) o bien en (2)

eligiendo (1) $bh = 12$ (la primera) :

$$\begin{aligned} b(7-b) &= 12 \Rightarrow \\ 7b - b^2 - 12 &= 0 \Rightarrow b^2 - 7b + 12 = 0 \end{aligned}$$

ecuación de segundo grado resoluble por fórmula: obteniéndose : $b=3$ o $b=4$

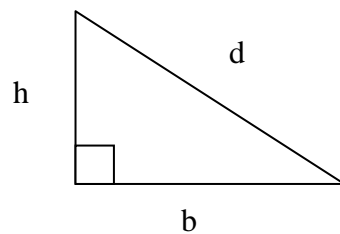
con $b=3$ en $bh=12$ se obtiene $h=4$ que al reemplazar en **la ecuación** $P = b + h + d$

obtendremos: $P = 3+4+5 \Rightarrow P = 12$ cm

Se puede verificar que $A = 6 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ (¿ satisface el producto= resultado las condiciones exigidas?

Con $b=4$, se obtiene $h=3$ y $P = 12$ cm.

Nota bene: estas ecuaciones corresponden a las que se cumplen en un triángulo rectángulo:



1.- Con acuerdo al siguiente **Modelo Teórico**:

$$A = \frac{1}{2} bh \quad ; \quad d^2 = b^2 + h^2 \quad ; \quad P = b + h + d$$

1.- Haga un listado de todas las “variables” que se consideran en el conjunto de ecuaciones del “modelo Teórico”

2.- ¿ Cuántos datos se requieren como mínimo para que todas las ecuaciones estén determinadas?(Según el significado que se le dio a esta expresión en este documento)

3.- ¿ Cuántas combinaciones de parejas de datos se pueden establecer? Y por consiguiente cuántos problemas “ diferentes” se podrían plantear ?

4.- ¿ Qué podría ocurrir si se dan los datos numéricos de tres variables ?

5.- Para una situación determinada verifique si el conjunto de mediciones es correcta:

$$b= 4\text{cm}; d= 5 \text{ cm} ; h= 3 \text{ cm}; A= 8 \text{ cm}^2 ; P = 12 \text{ cm} ;$$

6.- a) Bosquejar Diagrama de Relaciones para los siguientes datos : b,h

b) Determinar todos los caminos posibles de resolución.Asignando una letra A,B,.. a cada paso escriba la secuencia correspondiente a cada camino.

c) ¿ Cuántos puntos de partida hay ?

d) evalúe para b= 10 cm y h= 7,5 cm. Utilice el camino más corto.

7.- Para todas las combinaciones posibles de parejas de datos(dos datos):

- escriba el diagrama de relaciones pertinente.
- escriba secuencia de resolución.
- en cada caso señale con letras o números los pasos a seguir en el diagrama, y señale adecuadamente cuando se presente un sistema de ecuaciones.

2.- Con ayuda del **Modelo Teórico siguiente** :

$Q = P + SR$	$2SM = Q - P$	$M = PR + \frac{1}{2} SR$
$N = (P + Q) / 2$	$N = M / R$	

a) Bosquejar Diagrama de Relaciones para los siguientes datos : P,Q,R

b) Determinar todos los caminos posibles de resolución.

c)¿ Cuántos puntos de partida hay ?

- Con ayuda del Modelo Teórico que se indicará a continuación, dibuje un Diagrama de Relaciones para la determinación del grupo de cantidades que se supondrán desconocidas.
- Establezca en cada caso SI FALTAN DATOS para resolver el problema.(en el sentido de obtener un valor numérico y no un conjunto infinito de soluciones)
- Establezca en cada caso todos los caminos posibles para resolver el problema.
- Establezca en cada caso SI HAY DATOS QUE ESTÁN DEMÁS.

Modelo Teórico :

1.- $AB = C + D$	6.- $G = HA$
2.- $C = D + AF$	7.- $I = GB$
3.- $B = D + AF$	8.- $J = I / F$
4.- $B = EF$	9.- $J = GE$
5.- $E = C + D$	

1.- Datos : A, B, C, D,E.

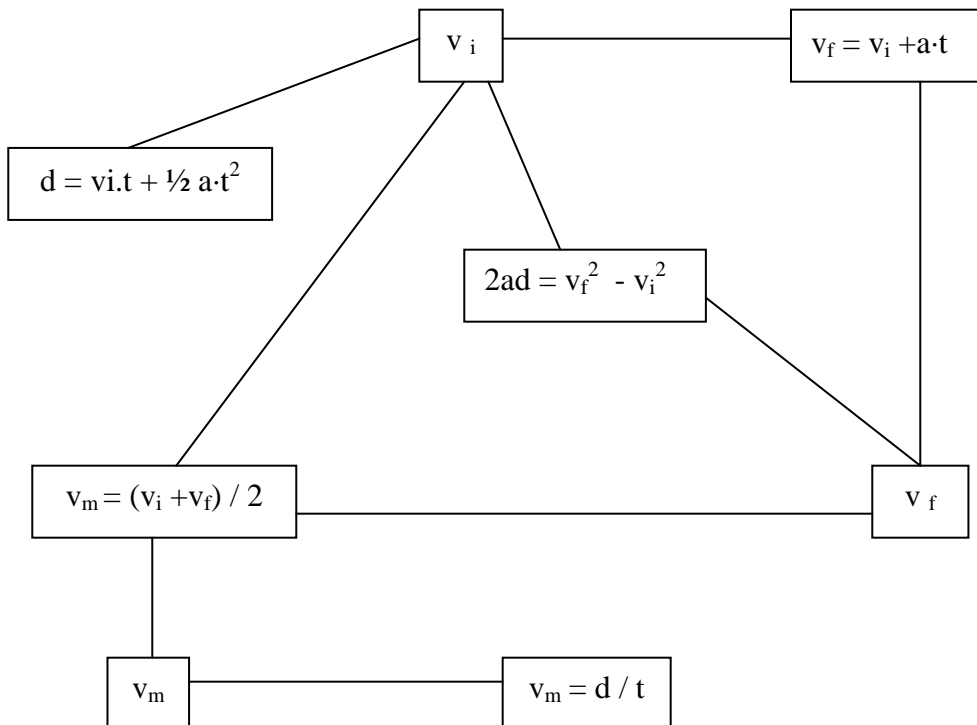
2.- Datos : A, B,F,G,H,I.

3.- Datos : I, J, K,G, D.

4.- Datos : E, C,F,G,H,I.

Con relación al siguiente diagrama y siendo d, a, t, los datos :

- completar el diagrama dando el orden de resolución utilizando flechas e “identificar los puntos de partida”
- dar el listado de todos los caminos posibles de resolución.
- con ayuda de flechas indique la secuencia de resolución.



Calcular la masa de un objeto que recorre 40 metros en 10 segundos que parte del reposo, debido a la aplicación de una fuerza constante que desarrolla una potencia de 400 watt.

ASIGNAMOS NOMBRES A LAS VARIABLES QUE INTERVIENEN”

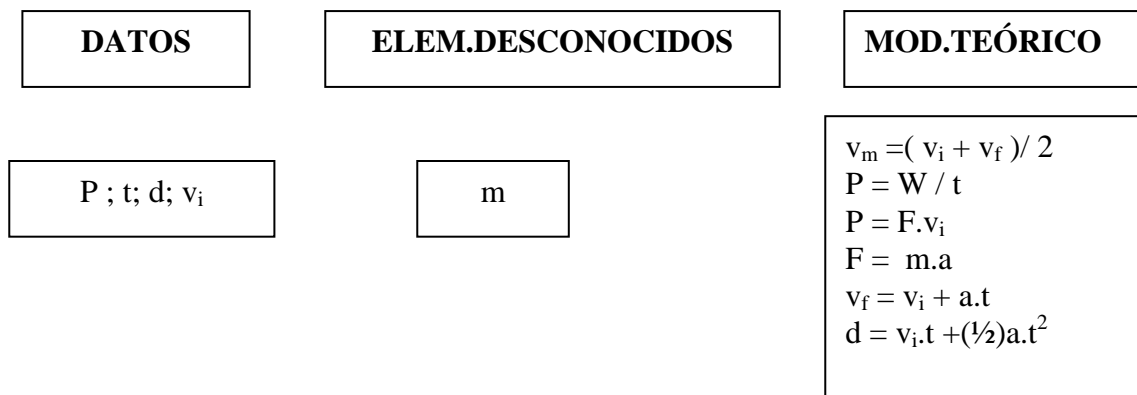
m : masa
 t : tiempo
 d : distancia
 v_i: rapidez inicial
 F : Fuerza
 P : Potencia.

“ O BIEN SE EMPLEA LA NOMENCLATURA QUE ESTÁ MÁS EN USO,O LA MÁS FRECUENTE,SEGÚN CONVENCIONES ESTABLECIDAS”

EN CASO DE NO EXISTIR SIMBOLOGÍA APROPIADA EN USO, QUIEN RESUELVE EL PROBLEMA, LA DEFINE”

SIMBOLOGÍA APROPIADA EN USO, QUIEN RESUELVE EL PROBLEMA, LA DEFIN”

ESCRIBIR LISTADO DE DATOS/ELEMENTOS DESCONOCIDOS/PRINCIPIOS DEL MODELO TEÓRICO”

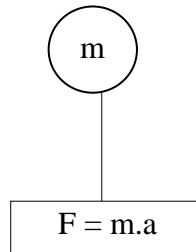


Al escribir el listado de Principios aparecen otros símbolos que corresponden a variables no consideradas en un comienzo:

v_m : velocidad media / v_f : velocidad final / W : trabajo / a : aceleración

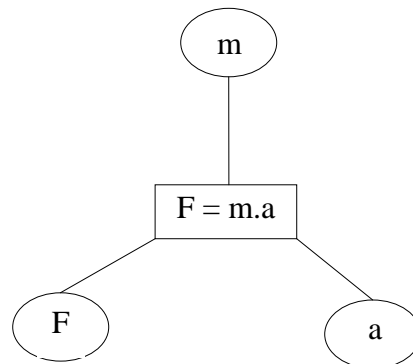
“ SE COMIENZA EL DIAGRAMA DE RELACIONES (TENTATIVO) A PARTIR DEL ÚNICO ELEMENTO DESCONOCIDO APARENTE, COMO SE HA DICHO EN UN PROBLEMA PUEDE HABER MÁS DE UN ELEMENTO DESCONOCIDO”

“SE PROCEDE A ‘BUSCAR’ (PROCESO DE CONTRACTACIÓN)EN EL CONJUNTO DE PRINCIPIOS, UNA RELACIÓN QUE CONTENGA LA VARIABLE “ m ”



“ESTA RELACIÓN ORIGINA OTROS PROBLEMAS UNIDADES O ELEMENTOS DESCONOCIDOS”

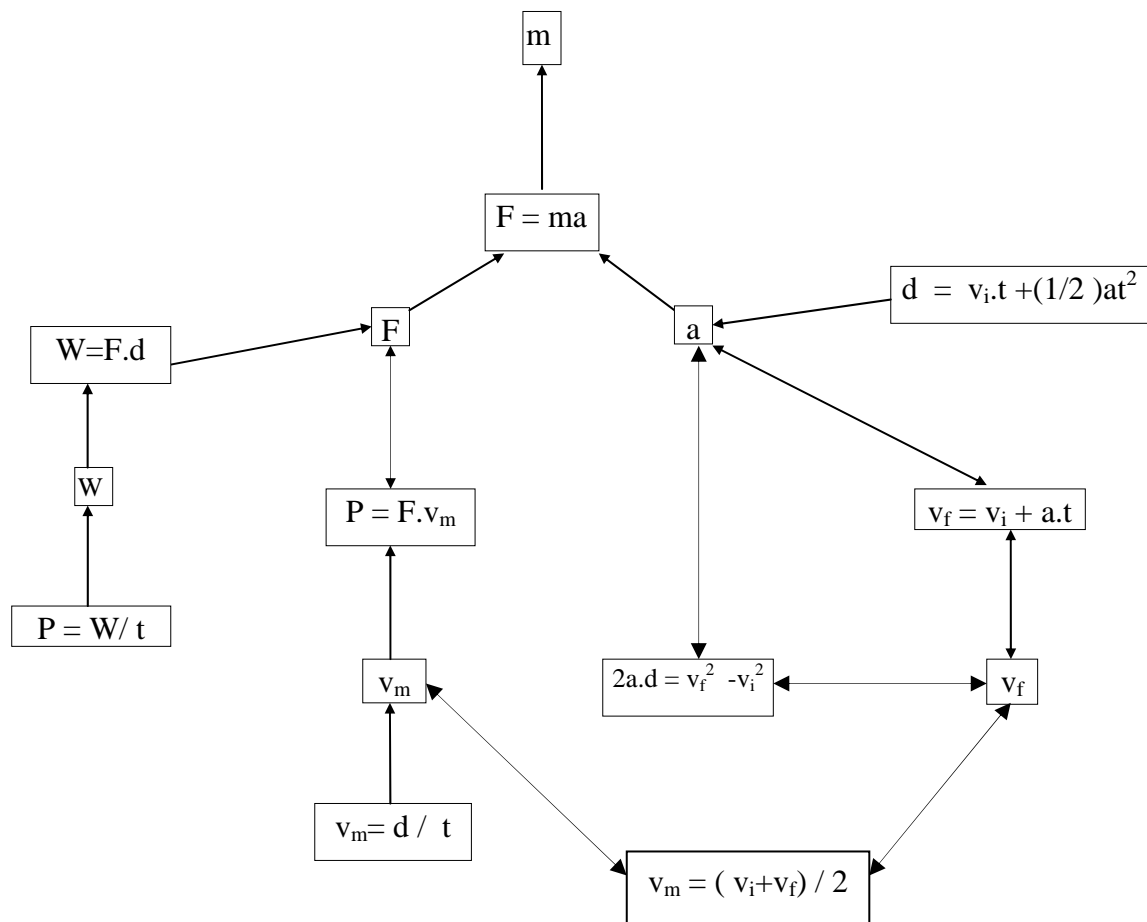
“ SI ESTOS ELEMENTOS SON O NO DESCONOCIDOS, SE DETERMINA POR EL PROCESO DE CONTRACTACIÓN CON EL CONJUNTO DE DATOS”



En donde F y a son elementos desconocidos. Siguiendo este Proceso de Contractación:

Elem. desconocidos \Leftrightarrow Conj.de Principios \Leftrightarrow Conj.de Datos

Llegamos finalmente al siguiente Diagrama.



Se observa que :

1. Hay cuatro puntos de inicio, a saber : 1;5;6 y 8.

2. Caminos posibles:

A: 1 → 2 → 3

B: 1 → 2 → 4 → 6 → 8 → 3

C: 5 → 4 → 3

D: 5 → 4 → 6 → 8 → 3

E: 7 → 6 → 4 → 3

F: 7 → 8 → 3

G: 9 → 3

H: 9 → 8 → 6 → 4 → 3

2. Hay más de un camino de resolución del problema, a saber:

A y B

C y D

E y F

A y D

C y F

E y G

A y F

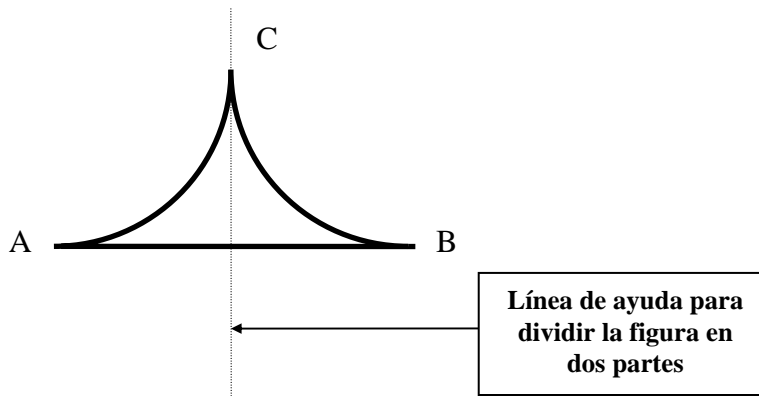
C y G

A y G

En total, si no se ha introducido algún error, es posible distinguir 9 caminos posibles de resolución.

Segundo Ejemplo:

Determinar y calcular el área de la región limitada por el segmento AB y los arcos de circunferencia AC y BC sabiendo que los arcos son congruentes e iguales cada uno a la cuarta parte de una circunferencia de radio 10 cm



LLEVAMOS EL PROBLEMA A UNA SITUACIÓN RECONOCIBLE, EQUIVALENTE, MODIFICANDO LA DISTRIBUCIÓN DE LOS ELEMENTOS QUE LA COMPONEN :



DIVIDIMOS EL PROBLEMA EN UNIDADES SIMPLES:



ASIGNAMOS NOMBRES A LAS VARIABLES QUE INTERVIENEN

- L: base del rectángulo. H = altura del rectángulo r: radio semicírculo.
- Ar : área rectángulo A_{sc}:área semicírculo. A_{fig}: área buscada.

**ORDENAMOS LA SITUACIÓN EN TRES CONJUNTOS DATOS,
ELEMENTOS DESCONOCIDOS Y MODELO TEÓRICO**

DATOS

$r = 10 \text{ cm}$

ELEMENTOS DESCONOCIDOS

L, h, A_{sc}, A_r

MODELO TEÓRICO

$A_{sc} = 3,14 r^2 / h$
 $A_r = Lxh$

CONFECCIONAMOS DIAGRAMA DE RELACIONES :

