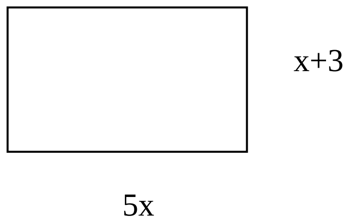
Conjunto Universo

Una cuestión importante que se debe tener en cuenta siempre al resolver una situación problemática, es el Conjunto Universo, en el cual el modelo que hemos construido tiene validez y por tanto las soluciones que obtengamos, deben pertenecer a dicho conjunto.

Ejemplos de lo que se está planteando:

Calcular los lados de un rectángulo cuya área es igual a 50 cm^2 Sabiendo que la altura es la quinta parte de la base aumentada en tres.



La resolución pasa por "saber" que 5x > 0 y que x+3 > 0
A continuación, escribimos la relación del área para el rectángulo:

$$
\begin{aligned}
50 &= 5x(x+3)\\
50 &= 15x + 5x^2\\
5x^2 + 15x - 50 &= 0, \text{ Solution is: } -5, 2
\end{aligned}
$$

Por lo que el resultado x = -5 queda fuera del conjunto solución, porque no pertenece al Universo de la situación problemática que estamos resolviendo.
Finalmente, con el resultado x = 2 ; se tiene que los lados son base = 10 cm y altura = 5 cm.

Otra situación: Resolver la ecuación irracional:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{20-x} = x+1\\
&\left(\sqrt{20-x}\right)^2 = (x+1)^2\\
&20 - x = x^2 + 2x + 1\\
&x^2 + 3x - 19 = 0, \text{ Solution is: } -\tfrac{1}{2}\sqrt{85} - \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{85} - \tfrac{3}{2}\\
&\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{85} - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{85} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \approx -6.1098 \\ \approx 3.10978 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

De la resolución de la ecuación de segundo grado se obtienen dos resultados, siendo uno solo de ellos correcto, ya que el otro no pertenece al conjunto Universo.

La determinación del conjunto Universo en este caso pasa por resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 20 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{bmatrix}, \text{ Solution is: } [-1, 20]$$

y como se puede observar, el conjunto Universo está dado por U= [-1,20]
y se cumple que :

$$\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{85} - \tfrac{3}{2}\right) \notin [-1, 20]$$

Lo mismo ocurre cuando resolvemos ecuaciones logarítmicas, como en el ejemplo que sigue:

$$\begin{aligned}
&\log_2(x+3) + \log_2(21-x) = 7 \\
&\log_2[(x+3)(21-x)] = 7 \\
&(x+3)(21-x) = 2^7 \\
&-x^2 + 18x + 63 = 128 \\
&x^2 - 18x + 65 = 0, \text{ Solution is: } 5, 13
\end{aligned}$$

En este caso, la determinación del conjunto universo pasa por resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x + 3 > 0 \\ 21 - x > 0 \end{bmatrix}, \text{ Solution is: }]-3, 21[$$

Por lo que, ambos resultados pertenecen al conjunto Universo, y la solución es: S = {5,13}

Estudiemos otro ejemplo:

$$\begin{aligned}
&\log_6(x+3) + \log_6(x-2) = 1 \\
&\log_6[(x+3)(x-2)] = 1 \\
&(x+3)(x-2) = 6 \\
&x^2 + x - 12 = 0 \\
&(x+4)(x-3) = 0, \text{ Solution is: } 3, -4
\end{aligned}$$

Se puede observar rápidamente que -4 no puede ser solución por cuanto se tendría que en ambos logaritmos el argumento sería negativo, lo cual no puede ser.
La determinación del conjunto Universo estaría dada por la resolución del sistema de inecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} x + 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{bmatrix}, \text{ Solution is: }]2, \infty[$$